

Tecniche di Generazione di Griglia per il Calcolo Scientifico

Triangolazione di Delaunay

Stefano Rebay

`stefano.rebay@ing.unibs.it`

Dipartimento di Ingegneria Meccanica
Università di Brescia, Italy

`www.unibs.it`

Bibliografia

- ▶ George, P.L. (1998). “Delaunay triangulation and Meshing” Editions HERMES.
- ▶ Weatherill N.P. (?)

Ringraziamenti

- ▶ Il materiale qui presentato è stato in gran parte realizzato nel corso di una collaborazione con
 - A. Ghidoni (Università di Brescia)
 - E. Pellizzari, V. Selmin (Alenia Aeronautica, Torino)
- ▶ “3D Unstructured Anisotropic Grid Generation” in corso di pubblicazione su *International Journal for Numerical Methods in Fluids*

Sommario

Triangolazione di Delaunay

1. Definizioni e principali proprietà della triangolazione di Delaunay;
2. Algoritmi per generare la triangolazione di Delaunay in 2D e in 3D;
3. Griglie di calcolo: triangolazione di Delaunay vincolata in 2D e in 3D;
4. Triangolazione di Delaunay Anisotrope in 2D e in 3D;
5. Generazione automatica di griglie di Delaunay in 2D;
6. Generazione automatica di griglie di Delaunay superficiali;
7. Generazione automatica di griglie di Delaunay in 3D;

Triangolazione di un insieme arbitrario di punti

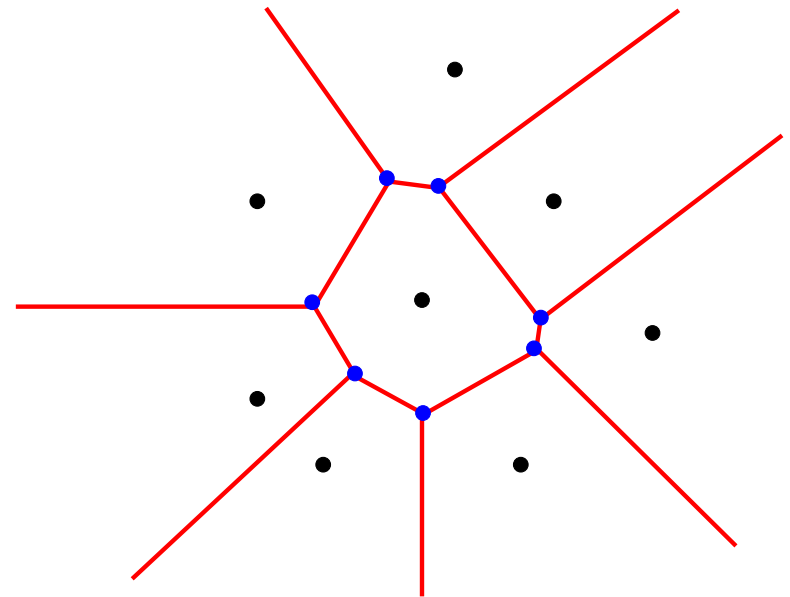
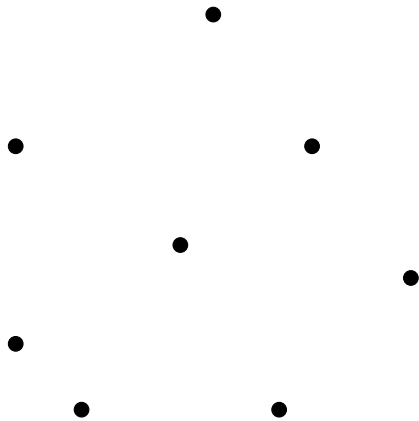
- ▶ Griglia di calcolo: suddivisione del dominio nell'unione di elementi di forma semplice. Esaminiamo qui il solo caso di “triangolazioni” ovvero griglie costituite esclusivamente da triangoli in 2D o di tetraedri in 3D
- ▶ Costruzione griglia: determinare punti e connessioni tra punti
- ▶ Sottoproblema: determinare le connessioni di un insieme di N punti \mathcal{P}_i predeterminati
- ▶ Esistono molti modi di connettere gli N punti in modo da formare una triangolazione
- ▶ La triangolazione di Delaunay è, tra le molte possibili, una particolare triangolazione univocamente determinata dalla posizione dei punti \mathcal{P} che gode di particolari proprietà geometriche.
- ▶ Esistono algoritmi efficienti e robusti per la costruzione della triangolazione di Delaunay a partire da un arbitrario insieme di punti dati.
- ▶ La triangolazione di Delaunay è il “duale” di un'altra costruzione geometrica nota come Tessellazione di Dirichlet

Tessellazione di Dirichlet e regioni di Voronoi

- ▶ Si consideri un insieme di N punti \mathcal{P}_i
- ▶ Ad ogni punto \mathcal{P}_i è associata una regione dello spazio \mathcal{V}_i
- ▶ La regione \mathcal{V}_i è il luogo dei punti X_i tali che

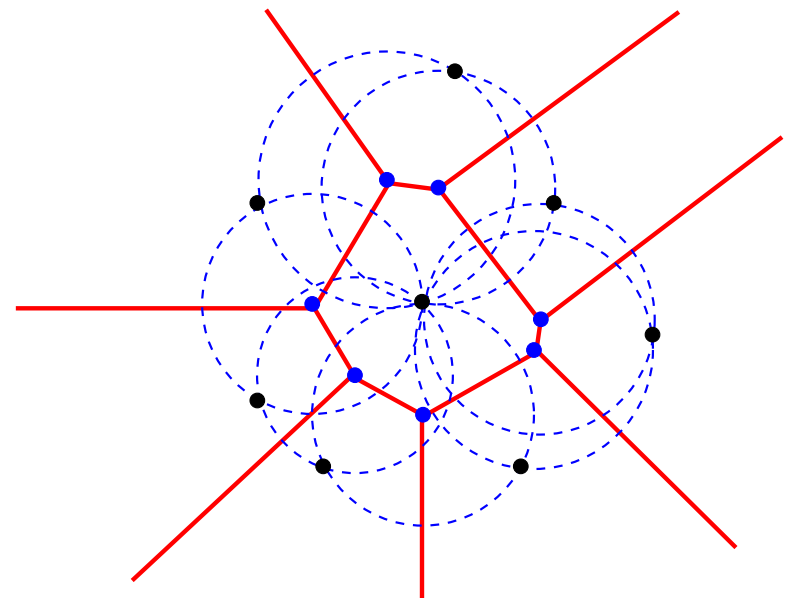
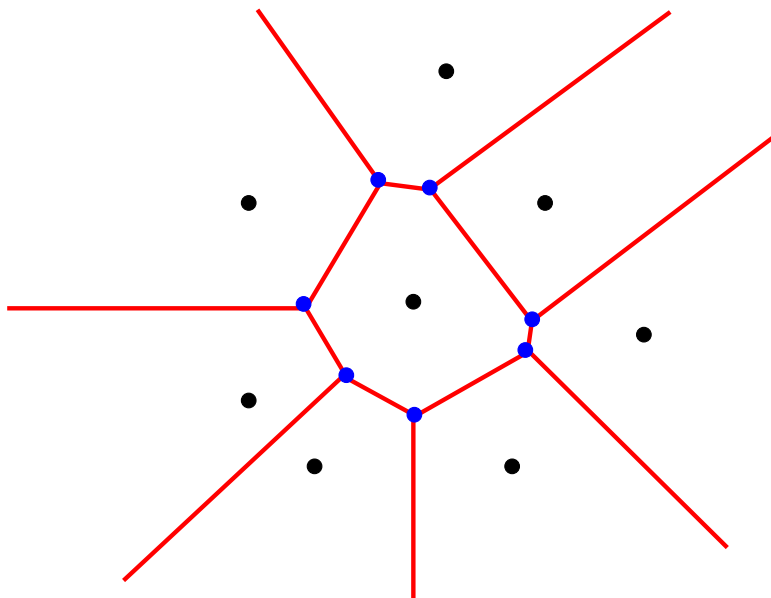
$$d(X_i, \mathcal{P}_i) < d(X_i, \mathcal{P}_j), \quad \forall j \neq i.$$

- ▶ L'unione dei lati di contorno delle regioni di \mathcal{V}_i è detto “diagramma di Voronoi”.



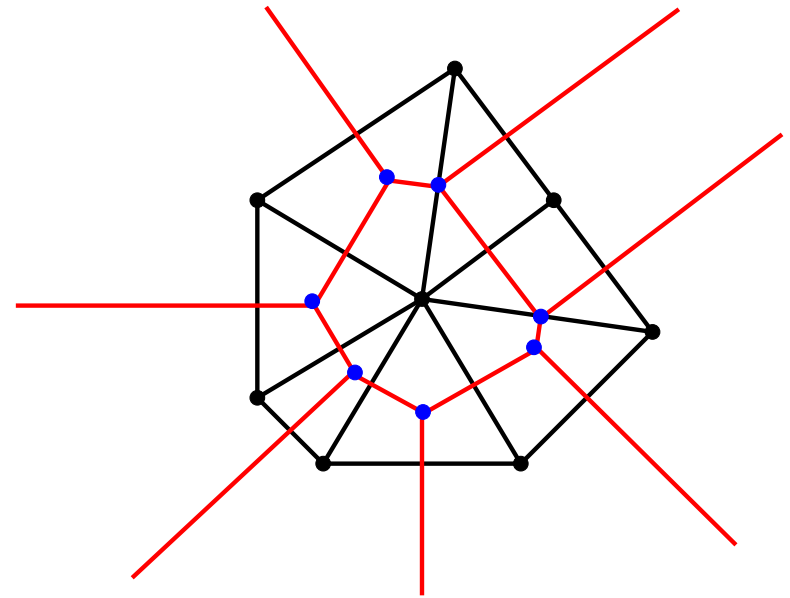
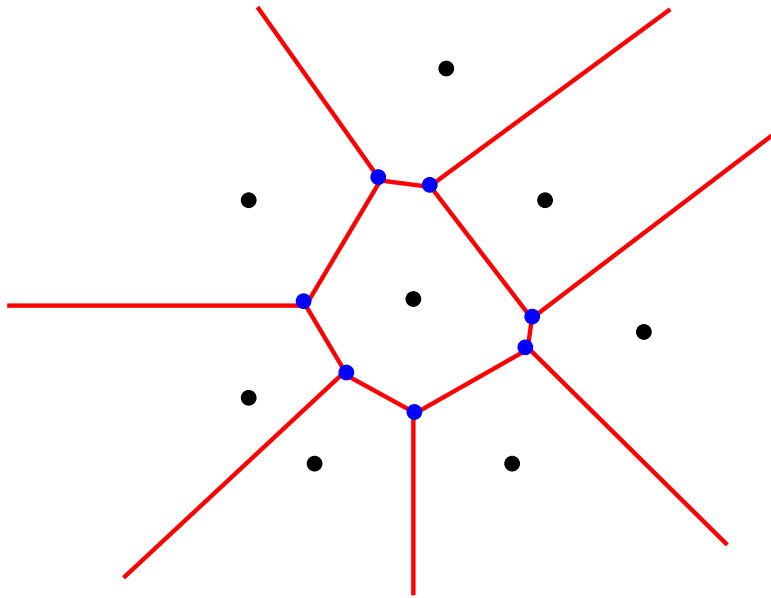
Lati e vertici del diagramma di Voronoi

- ▶ Il **lato** del diagramma di Voronoi appartenente a due regioni \mathcal{V}_i e \mathcal{V}_j adiacenti è il luogo dei punti equidistanti da \mathcal{P}_i e \mathcal{P}_j e quindi giace sull'asse del segmento che connette i punti \mathcal{P}_i e \mathcal{P}_j
- ▶ Il **vertice** del diagramma di Voronoi appartenente a tre regioni \mathcal{V}_i , \mathcal{V}_j e \mathcal{V}_k è equidistante dai tre punti \mathcal{P}_i , \mathcal{P}_j e \mathcal{P}_k e quindi coincide con il centro del cerchio passante per i quei tre punti



Tessellazione di Dirichlet e Triangolazione di Delaunay

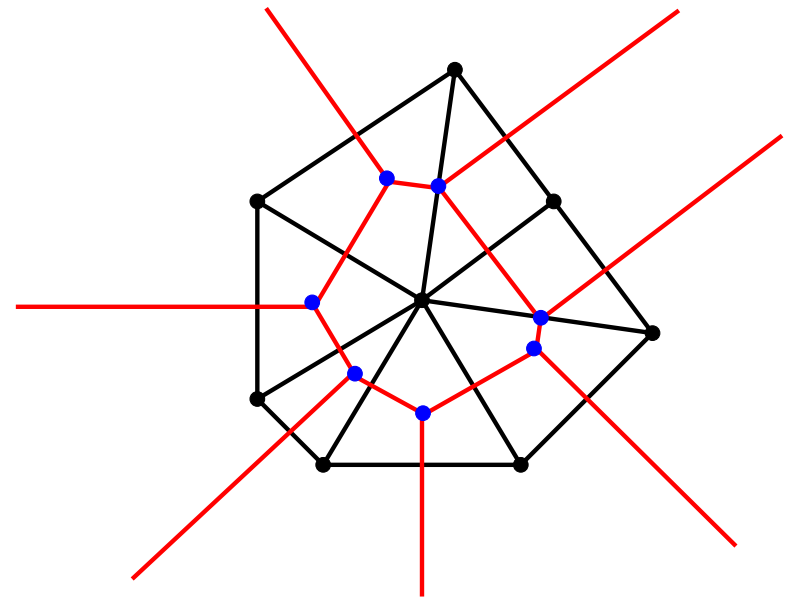
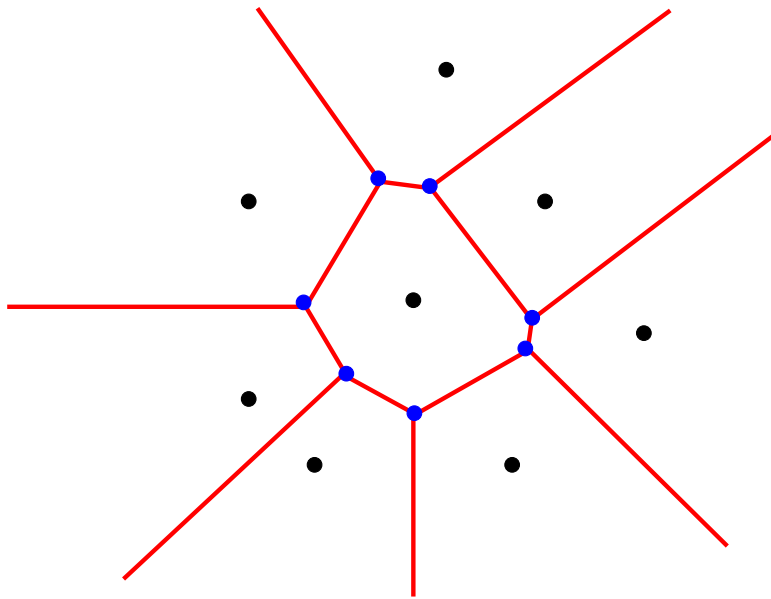
- ▶ Definizione: due punti \mathcal{P}_i e \mathcal{P}_j si dicono “contigui” se le due regioni \mathcal{V}_i e \mathcal{V}_j hanno un lato di contorno in comune.
- ▶ La triangolazione di Delaunay si ottiene connettendo punti “contigui”
- ▶ La triangolazione di Delaunay è univocamente determinata dall’insieme di punti dato (eccettuato i casi degeneri, vedi dopo).



Tessellazione di Dirichlet e Triangolazione di Delaunay

► Dualità:

- punto della triangolazione di Delaunay \Leftrightarrow regione di Voronoi
- lato della triangolazione di Delaunay \Leftrightarrow lato di Voronoi.
- triangolo di Delaunay \Leftrightarrow vertice di Voronoi

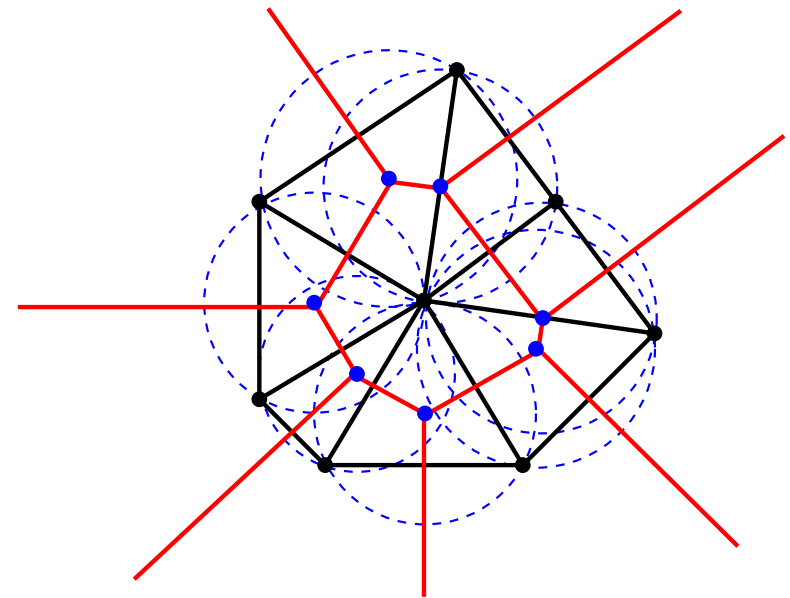
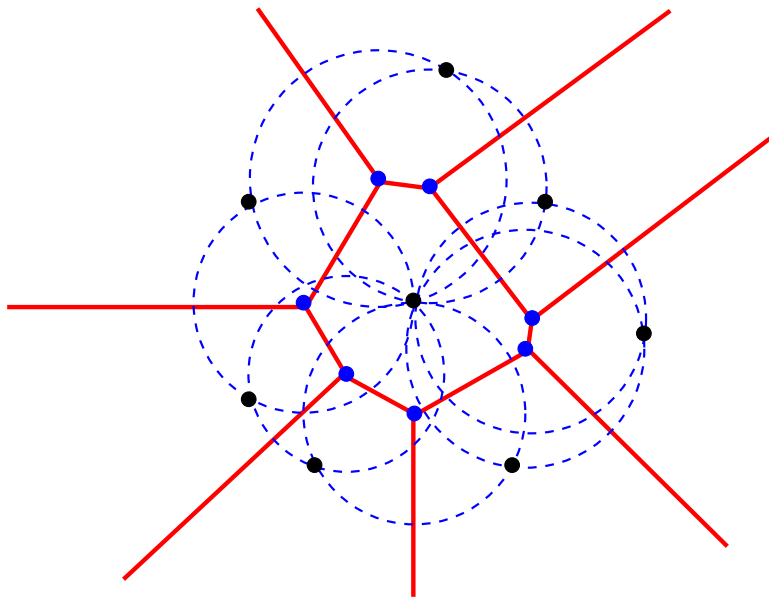


Triangolazione di Delaunay in 3D

- ▶ Le tessellazioni di Dirichlet e le triangolazioni di Delaunay si estendono naturalmente al caso N dimensionale
- ▶ In 3D le regioni di Voronoi sono dei poliedri delimitati da facce poligonali equidistanti da punti contigui. Le facce poligonali si intersecano lungo spigoli che sono equidistanti da tre punti contigui a due a due. Gli spigoli si incontrano in vertici che sono equidistanti da quattro punti, e quindi conicidono con il centro della sfera passante per quei quattro punti.
- ▶ La triangolazione di Delaunay si ottiene connettendo punti contigui
- ▶ Dualità:
 - punto della triangolazione di Delaunay \Leftrightarrow regione di Voronoi
 - spigolo della triangolazione di Delaunay \Leftrightarrow faccia di Voronoi.
 - faccia della triangolazione di Delaunay \Leftrightarrow spigolo di Voronoi.
 - tetraedro di Delaunay \Leftrightarrow vertice di Voronoi

Proprietà del cerchio circoscritto

- Il cerchio circoscritto ad un generico triangolo di Delaunay avente come vertici \mathcal{P}_i , \mathcal{P}_j e \mathcal{P}_k non contiene nessun altro punto $\mathcal{P}_\ell \notin \{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j, \mathcal{P}_k\}$ dell'insieme di punti dato

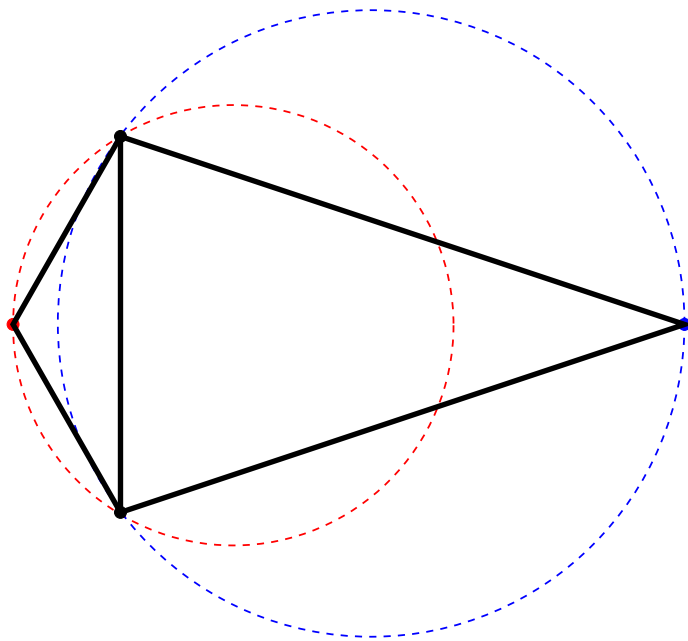


- Caso degenere: esistono quattro o più punti conciclici; in tal caso vi sono due o più vertici di Voronoi coincidenti, e la triangolazione di Delaunay non è univocamente determinata.

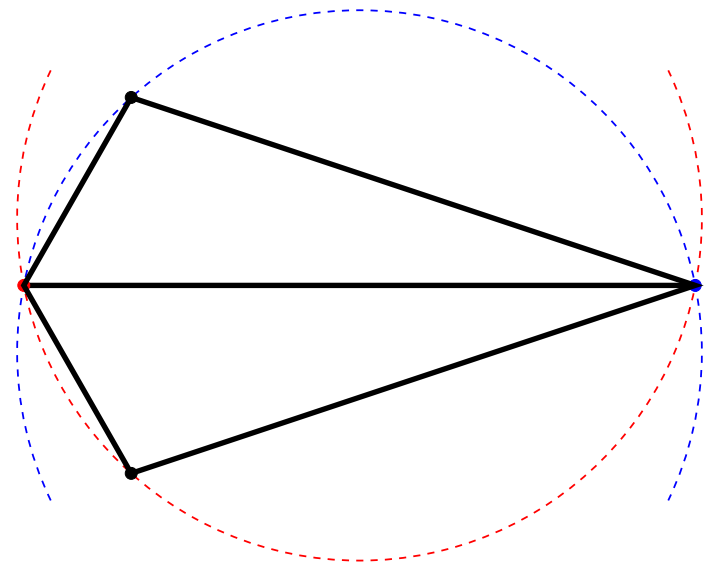
Proprietà di massimizzazione del minimo angolo

- ▶ La triangolazione di Delaunay massimizza il minimo angolo interno dei triangoli.
- ▶ Infatti, se si ruota una qualsiasi lato della triangolazione (non tutti i lati possono essere ruotati!) il minimo angolo dei due triangoli adiacenti al lato diminuisce.

Delaunay



Non-Delaunay



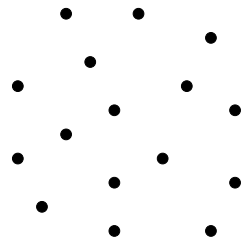
- ▶ Massimizzare il minimo angolo \neq Minimizzare il massimo angolo

Costruzione della triangolazione di Delaunay

- ▶ Tra i molti algoritmi proposti, ne esamineremo due:
 1. Algoritmo di Bowyer-Watson
 2. Algoritmo di Green-Sibson
- ▶ In entrambi i casi si tratta di algoritmi che consentono di calcolare la triangolazione di Delaunay \mathcal{T}_{n+1} di $n + 1$ punti a partire da una preesistente triangolazione di Delaunay \mathcal{T}_n di n punti (come vedremo è sufficiente una modifica *locale* della triangolazione preesistente). Si tratta quindi di algoritmi che consentono di calcolare le modifiche da apportare ad una triangolazione di Delaunay preesistente per poter inserire un nuovo punto.
- ▶ I due metodi possono essere utilizzati per calcolare la triangolazione del guscio convesso (convex hull) di un arbitrario insieme di punti nel seguente modo:
 1. si considera una triangolazione iniziale “di servizio” che contiene tutti i punti dell’insieme dato (ad esempio un unico triangolo).
 2. si inseriscono ad uno ad uno tutti i punti dell’insieme
 3. si cancellano tutti i triangoli che hanno un vertice coincidente con uno dei tre vertici della triangolazione di servizio iniziale.

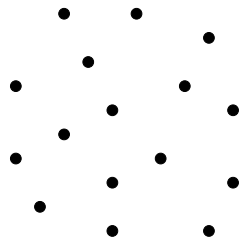
Triangolazione del guscio convesso

Insieme di punti

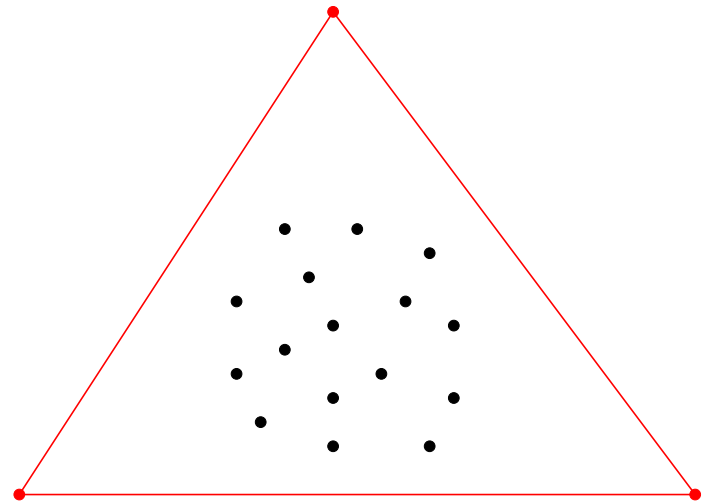


Triangolazione del guscio convesso

Insieme di punti

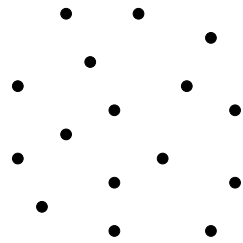


Triangolazione di servizio

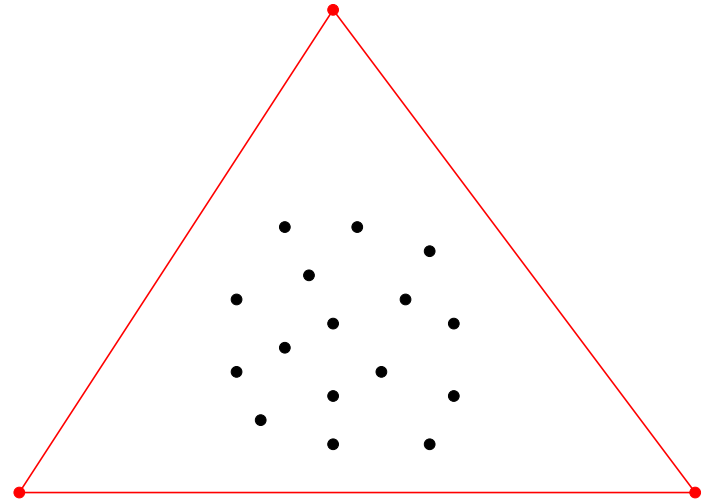


Triangolazione del guscio convesso

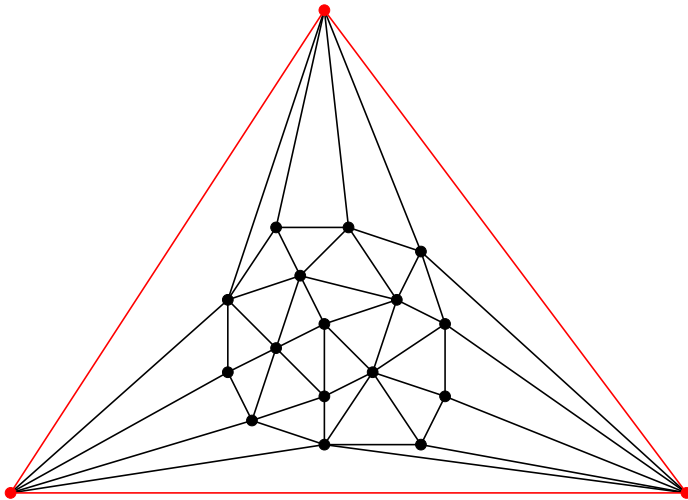
Insieme di punti



Triangolazione di servizio

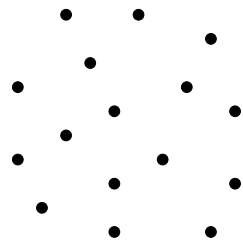


Inserzione punti

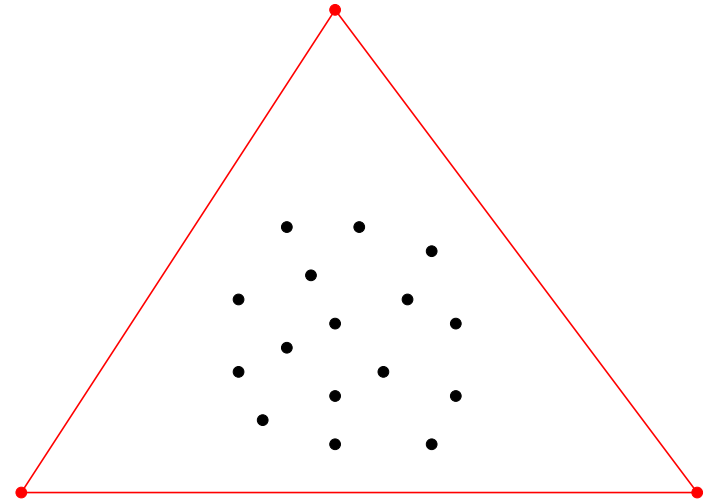


Triangolazione del guscio convesso

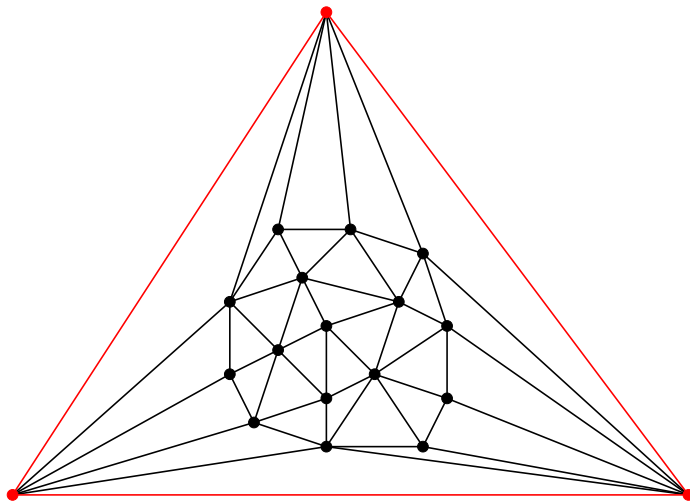
Insieme di punti



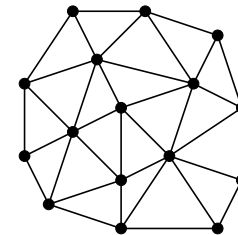
Triangolazione di servizio



Inserzione punti



Guscio convesso



Algoritmo di Bowyer-Watson

L'inserimento di un nuovo punto \mathcal{P} in una triangolazione di Delaunay \mathcal{T}_n consiste essenzialmente in due passi:

- 1. Costruzione della cavità.** La cavità \mathcal{C} è l'insieme dei triangoli di \mathcal{T}_n il cui cerchio circoscritto contiene il punto \mathcal{P} . I triangoli della cavità devono essere eliminati da \mathcal{T}_n perchè violano la “proprietà del cerchio circoscritto”. \mathcal{C} gode delle seguenti proprietà:
 - ▶ \mathcal{C} è un insieme semplicemente connesso
 - ▶ Il punto \mathcal{P} è contenuto in \mathcal{C}
 - ▶ Qualsiasi segmento che unisce il punto \mathcal{P} con un arbitrario punto di contorno di \mathcal{C} è contenuto completamente in \mathcal{C} . (qualsiasi raggio spiccato da \mathcal{P} interseca il contorno della cavità in un solo punto).
Si dice che \mathcal{C} è un insieme “stellato” rispetto al punto \mathcal{P}
- 2. Riconnessione.** La triangolazione di Delaunay \mathcal{T}_{n+1} si ottiene connettendo il punto \mathcal{P} con i punti \mathcal{P}_k appartenenti al contorno della cavità.
 - ▶ L'algoritmo è direttamente applicabile in 3D

Illustrazione dell'algoritmo di Bowyer-Watson in 2D

Triangolazione e nuovo punto

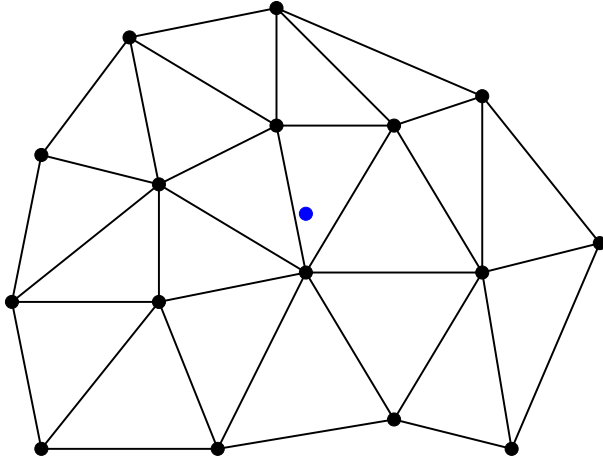
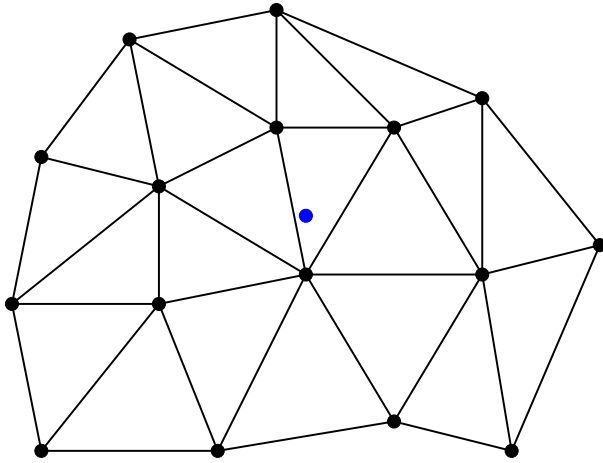


Illustrazione dell'algoritmo di Bowyer-Watson in 2D

Triangolazione e nuovo punto



Violazione cerchi circoscritti

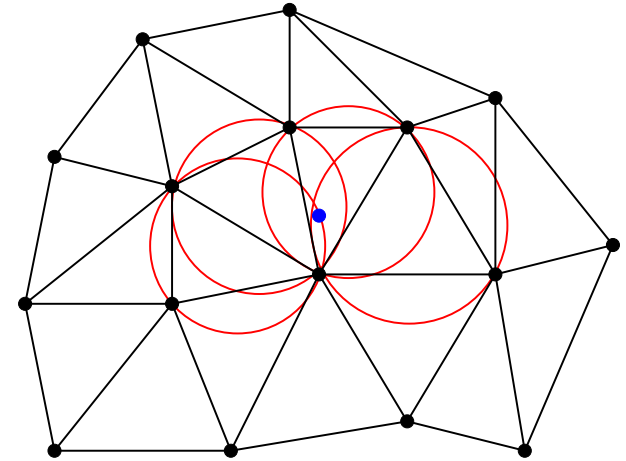
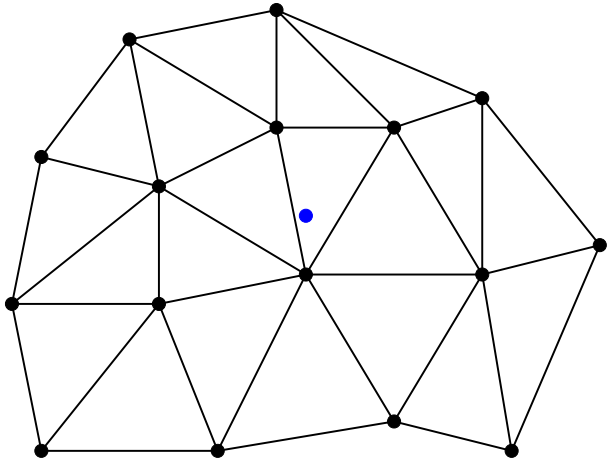
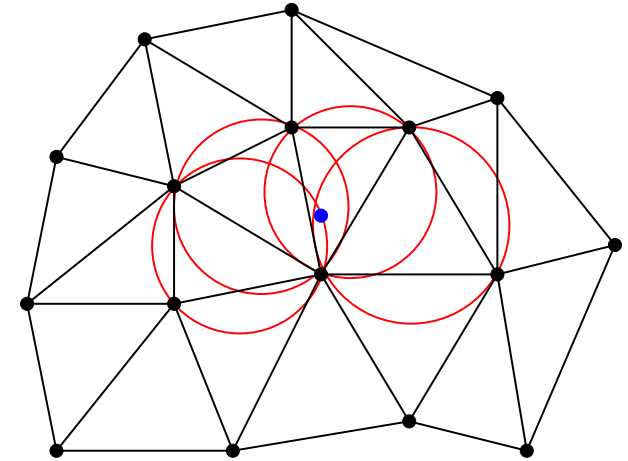


Illustrazione dell'algoritmo di Bowyer-Watson in 2D

Triangolazione e nuovo punto



Violazione cerchi circoscritti



Cavità

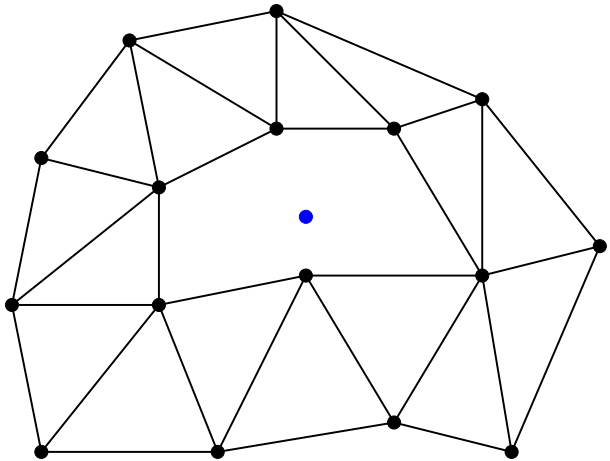
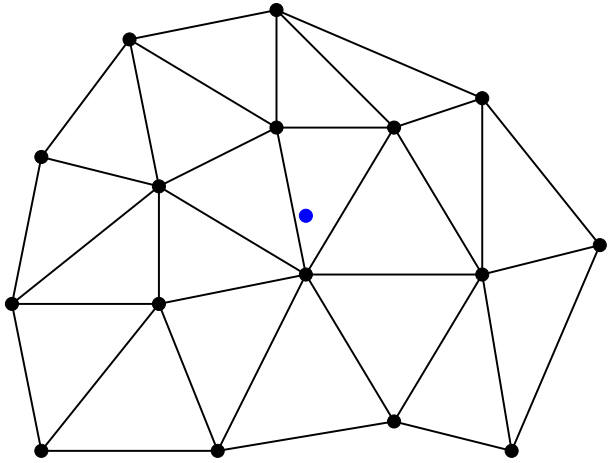
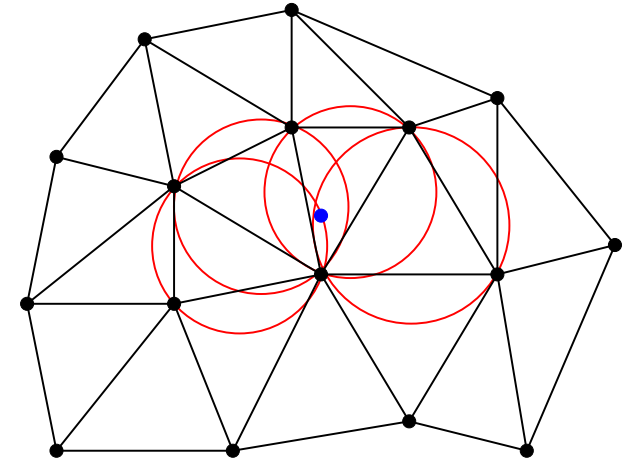


Illustrazione dell'algoritmo di Bowyer-Watson in 2D

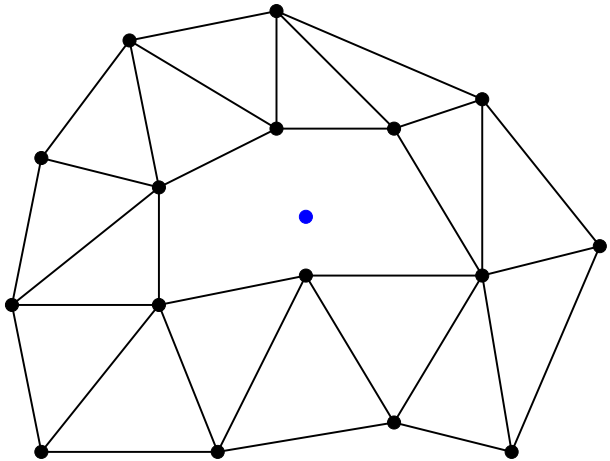
Triangolazione e nuovo punto



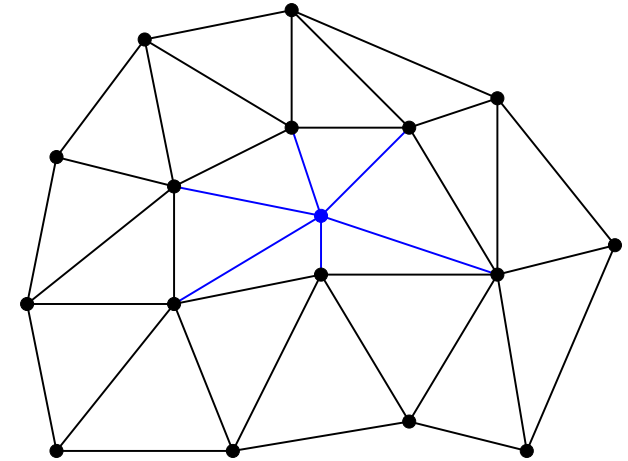
Violazione cerchi circoscritti



Cavità



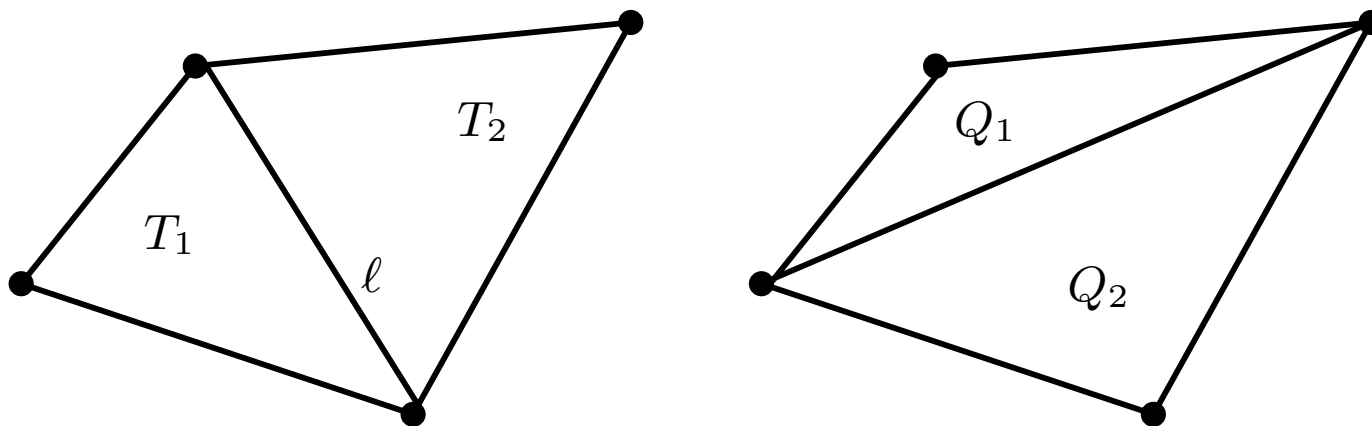
Riconnessione



Metodo di Green-Sibson in 2D

Per descrivere il metodo di Green-Sibson è necessario definire una trasformazione locale di una triangolazione detta “trasformazione lato-lato”

- ▶ Si consideri una coppia di triangoli T_1 e T_2 e il lato ℓ in comune tra i due
- ▶ La trasformazione lato-lato consiste nell’eliminare dalla triangolazione il lato ℓ e sostituirlo con il lato che connette i due punti che non sono estremi di ℓ
- ▶ La trasformazione lato-lato è geometricamente ammissibile solo se il quadrilatero formato da $T_1 \cup T_2$ è convesso
- ▶ I due triangoli T_1 e T_2 vengono “trasformati” nei due triangoli Q_1 e Q_2



Metodo di Green-Sibson in 2D

L'inserimento di un nuovo punto \mathcal{P} in una triangolazione di Delaunay \mathcal{T}_n consiste essenzialmente in tre passi:

1. **Costruzione della "base"**. La base coincide con il triangolo che contiene il punto \mathcal{P} (o con due triangoli adiacenti se \mathcal{P} giace su un lato della triangolazione).
 2. **Riconnessione**: Si ottiene una triangolazione temporanea (non di Delaunay) connettendo \mathcal{P} con i punti \mathcal{P}_k appartenenti al contorno della base.
 3. **Trasformazione**: per tutti i triangoli che hanno un vertice coincidente con \mathcal{P} e che non soddisfano la proprietà del cerchio circoscritto, si effettua una trasformazione lato-lato con il lato del triangolo opposto a \mathcal{P} , fintanto che tutti i nuovi triangoli soddisfano alla proprietà del cerchio circoscritto.
- La generalizzazione al caso 3D non è immediata (trasformazione lato-lato = ?)

Illustrazione dell'algoritmo di Green-Sibson in 2D

Triangolazione

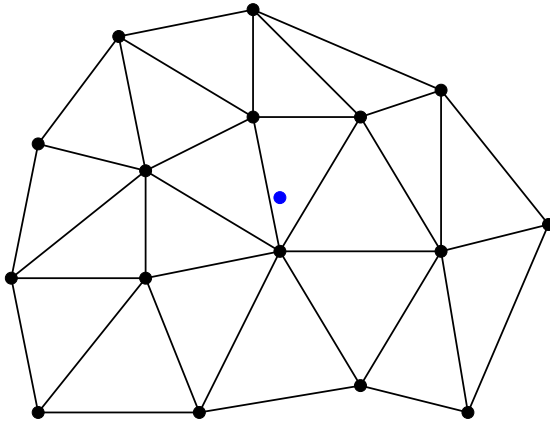
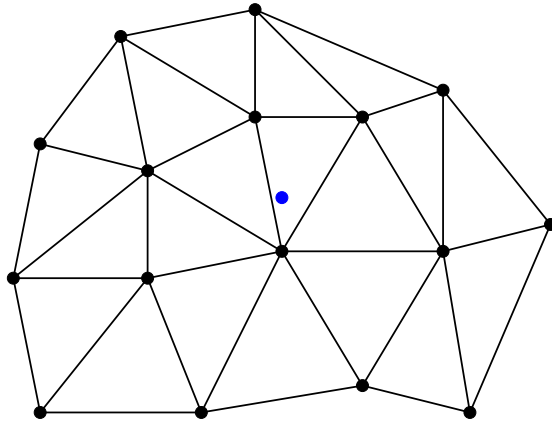


Illustrazione dell'algoritmo di Green-Sibson in 2D

Triangolazione



Riconnessione iniziale

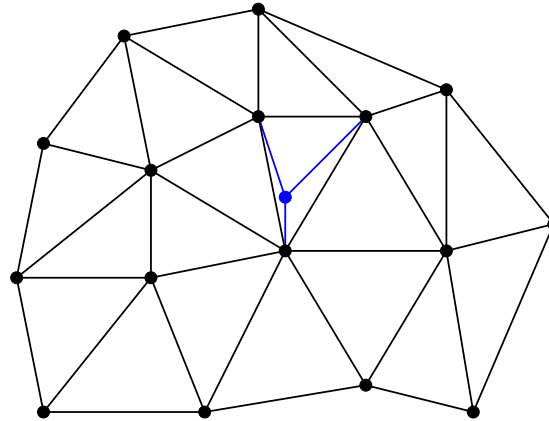
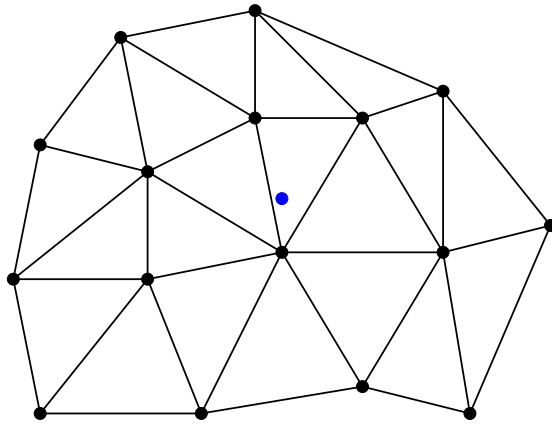
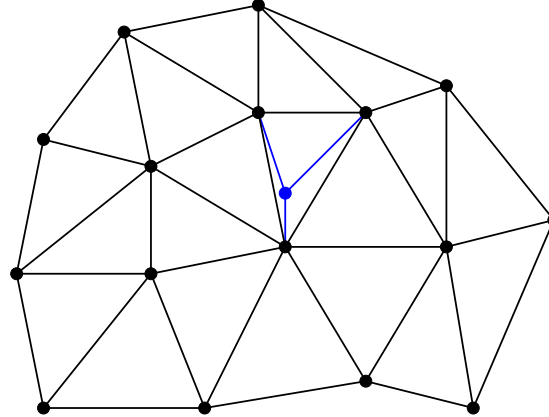


Illustrazione dell'algoritmo di Green-Sibson in 2D

Triangolazione



Riconnessione iniziale



Cerchio circoscritto

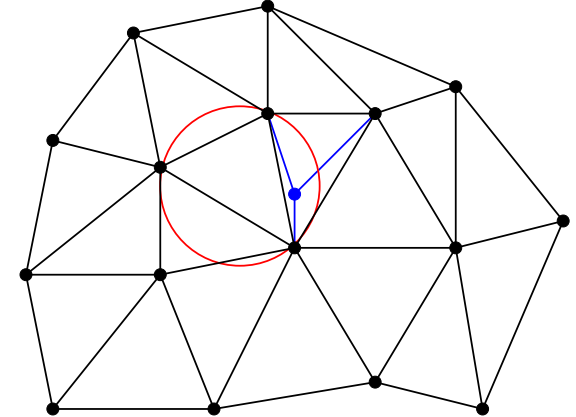
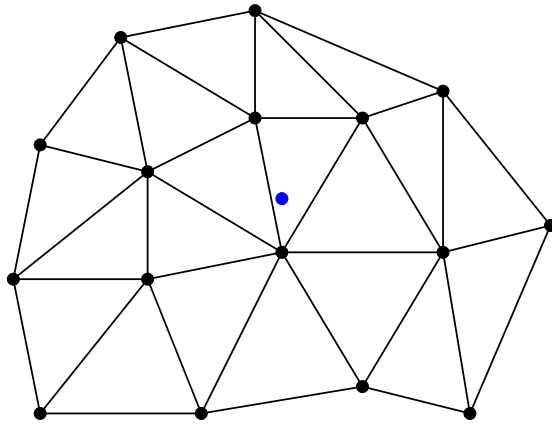
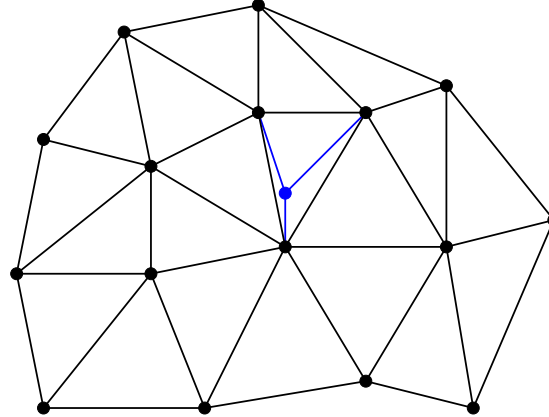


Illustrazione dell'algoritmo di Green-Sibson in 2D

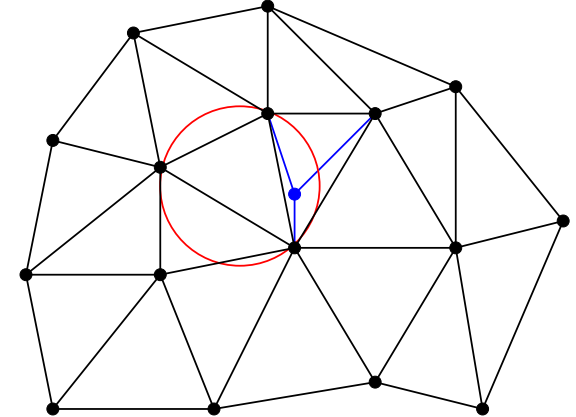
Triangolazione



Riconnessione iniziale



Cerchio circoscritto



Lato-Lato 1

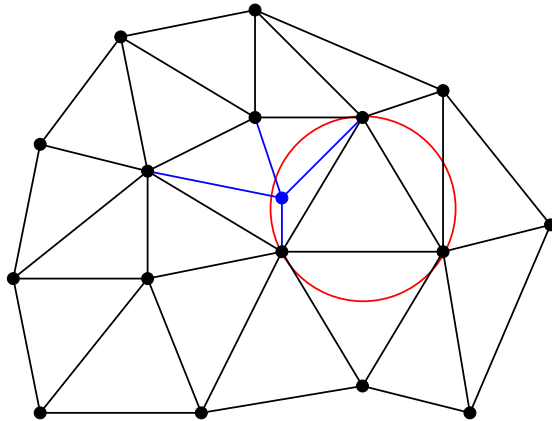
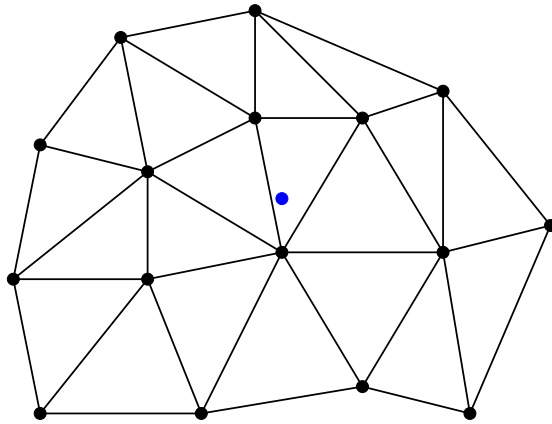
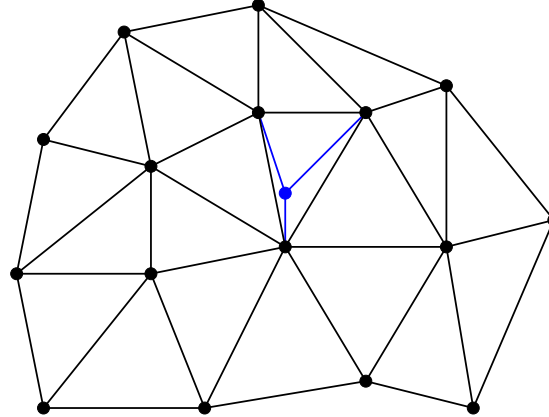


Illustrazione dell'algoritmo di Green-Sibson in 2D

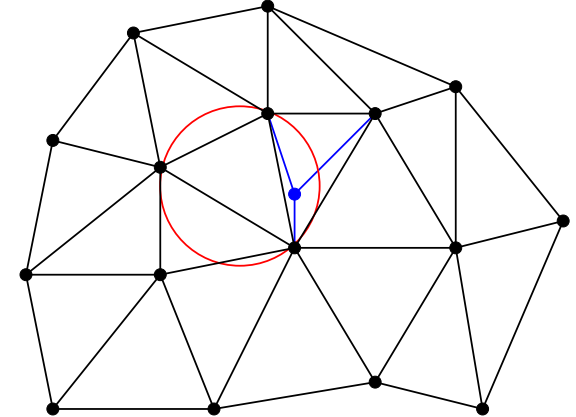
Triangolazione



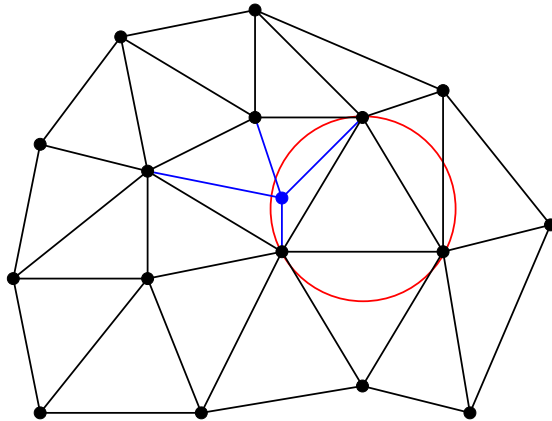
Riconnessione iniziale



Cerchio circoscritto



Lato-Lato 1



Lato-Lato 2

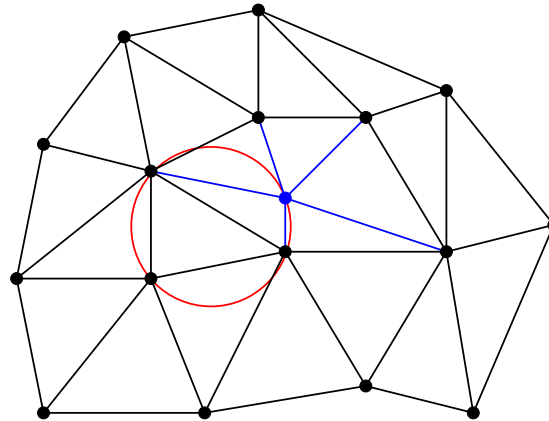
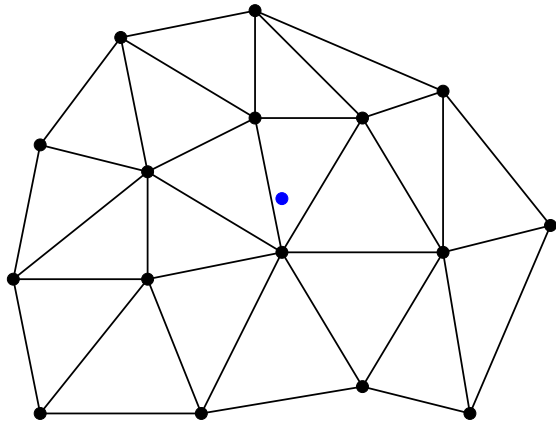
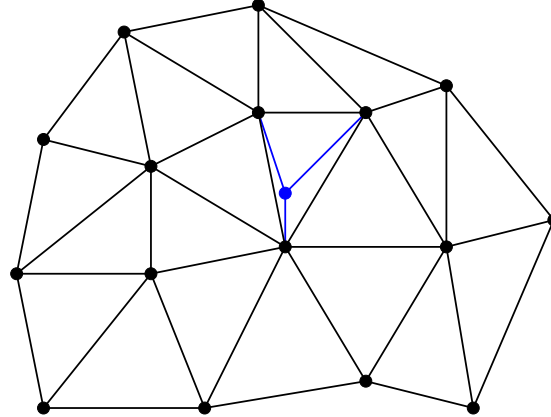


Illustrazione dell'algoritmo di Green-Sibson in 2D

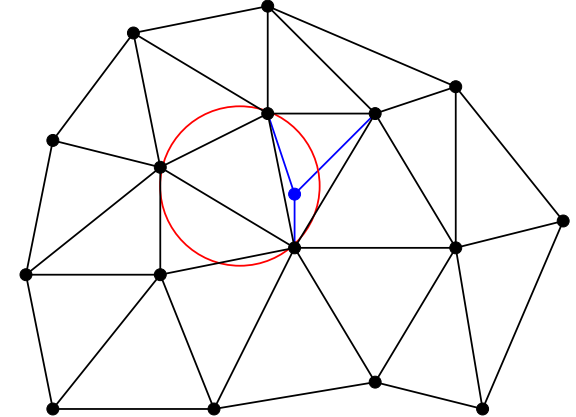
Triangolazione



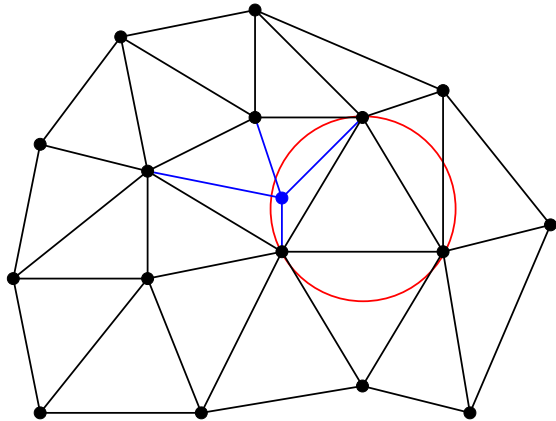
Riconnessione iniziale



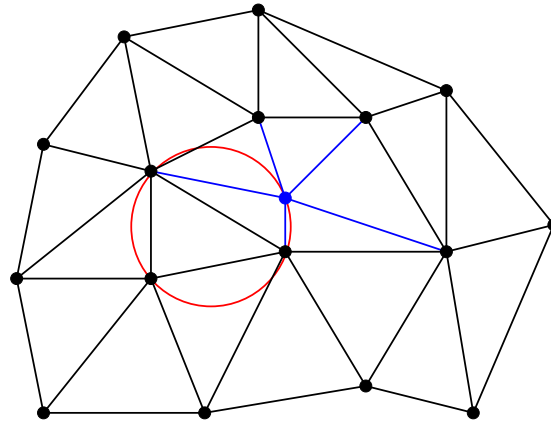
Cerchio circoscritto



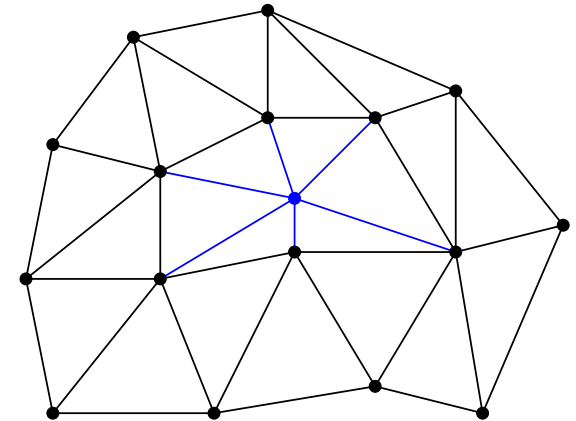
Lato-Lato 1



Lato-Lato 2



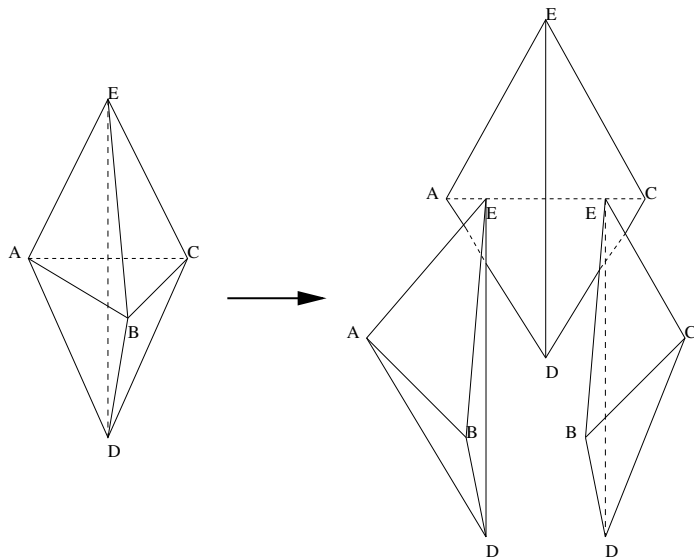
Lato-Lato 3



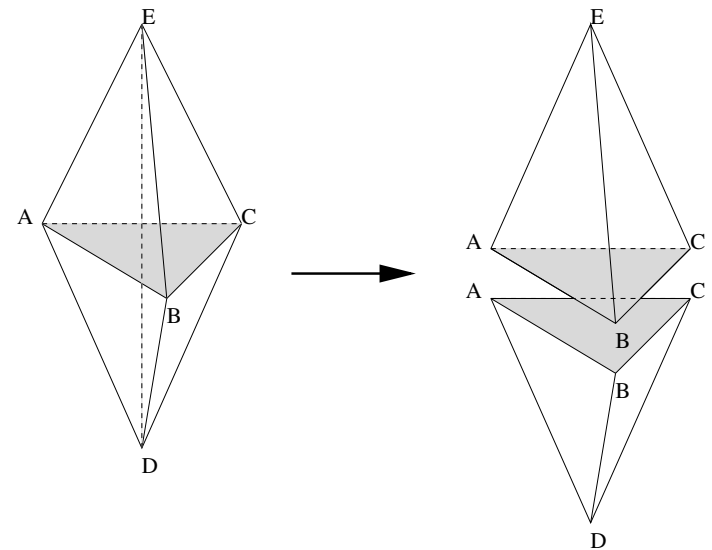
Trasformazioni locali in 3D

- ▶ **Faccia-Spigolo:** si elimina la faccia comune a due tetraedri e la si sostituisce con uno spigolo che connette i due punti non posseduti dalla faccia. I due tetraedri iniziali vengono eliminati e si generano tre tetraedri che hanno il nuovo spigolo in comune.
- ▶ **Spigolo-Faccia:** si elimina uno spigolo comune a tre tetraedri e lo si sostituisce con la faccia che connette i tre punti non posseduti dalla spigolo. I tre tetraedri iniziali vengono eliminati e si generano due tetraedri che hanno la nuova faccia in comune.

Faccia-Spigolo



Spigolo-Faccia



Generalizzazione del Metodo di Green-Sibson in 3D

L'algoritmo è simile al caso 2D tranne che per la terza fase (trasformazione):

1. **Costruzione della “base”**. La base coincide con il tetraedro che contiene il punto \mathcal{P} (due tetraedri adiacenti se \mathcal{P} giace su una faccia della triangolazione o più tetraedri se il nuovo punto giace su uno spigolo).
 2. **Riconnessione**: Si ottiene una triangolazione temporanea (non di Delaunay) connettendo \mathcal{P} con i punti \mathcal{P}_k appartenenti al contorno della base.
 3. **Trasformazione**: per tutti i triangoli che hanno un vertice coincidente con \mathcal{P} e che non soddisfano la proprietà del cerchio circoscritto e per i quali la trasformazione faccia-spigolo o spigolo-faccia è geometricamente ammissibile, si effettua una trasformazione faccia-spigolo o spigolo-faccia.
- ▶ Contrariamente al caso 2D, in 3D non è noto se con una serie di trasformazioni locali 3D faccia-spigolo e/o spigolo-faccia si possa ottenere una triangolazione qualsiasi, e quindi anche di Delaunay
 - ▶ In pratica l'algoritmo viene utilizzato con successo per costruire triangolazioni “pseudo-Delaunay” (descritte in seguito).

Triangolazione di Delaunay: Costo computazionale

- ▶ Ipotesi 1: esiste di un algoritmo efficiente per trovare un triangolo appartenente alla cavità (base). In pratica è necessario un metodo con costo computazionale $\leq O(\log(N))$, in cui N è il numero di punti presente nella triangolazione.
- ▶ Ipotesi 2: l'inserimento di un nuovo punto comporta modifiche locali della triangolazione, nel senso che il numero di triangoli della cavità è indipendente dal numero N di punti presenti nella triangolazione.
- ▶ La prima ipotesi è verificata (la ricerca efficiente è possibile)
- ▶ La seconda ipotesi è “normalmente” verificata. Se però la cavità generata dall'inserzione di un nuovo punto contiene (quasi) tutti i triangoli della triangolazione, il costo computazionale dell'inserzione di un nuovo punto è proporzionale al numero N di punti già connessi. Se questa situazione si ripete per tutti i punti da inserire (situazione patologica) la costruzione della triangolazione di Delaunay con gli algoritmi visti richiede $O(N^2)$ operazioni
- ▶ Di fatto situazioni patologiche come quelle descritte prima sono estremamente rare nella pratica

Implementazione

Implementazione dell'algoritmo di Bowyer-Watson: efficienza e robustezza

1. Efficienza

- ▶ Costo computazionale
- ▶ Struttura dati per la rappresentazione della triangolazione

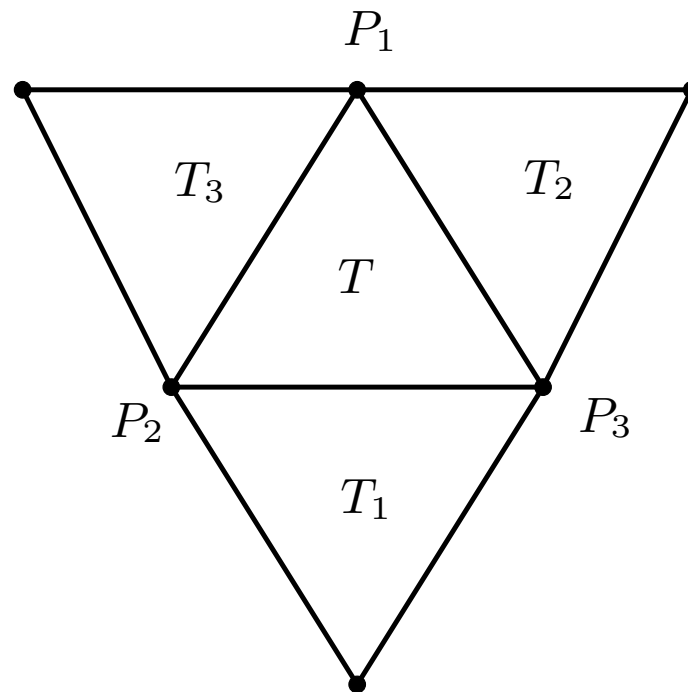
2. Robustezza

- ▶ Triangolazioni degeneri
- ▶ Algoritmo di Bowyer con correzione della cavità

Struttura dati per la triangolazione di Delaunay

Struttura dati classica ($D = 2, 3$ sono le dimensioni dello spazio):

1. Connettività triangolo \rightarrow nodo: sono noti i $D + 1$ punti di ogni triangolo (puntatori, indici, ...).
2. Connettività triangolo \rightarrow triangolo: sono noti i $D + 1$ triangoli adiacenti (che hanno cioè un lato in comune) di ogni triangolo.



Costruzione della cavità

1. Ricerca del primo triangolo della cavità (base)

- ▶ Se si conosce un punto precedentemente connesso “vicino” al punto da connettere (situazione tipica per la generazione di griglia) è utile disporre della connettività punto→triangolo, che fornisce un triangolo che possiede il punto \mathcal{P} come proprio vertice. A partire da questo triangolo e “muovendosi nella direzione del punto da inserire” si trova efficientemente un qualche triangolo da cancellare.
- ▶ Se l'ordine di inserimento dei punti è arbitrario è necessario disporre di strutture dati per la ricerca spaziale veloce, come quadtrees (octrees in 3D), alternate direction binary trees, . . .

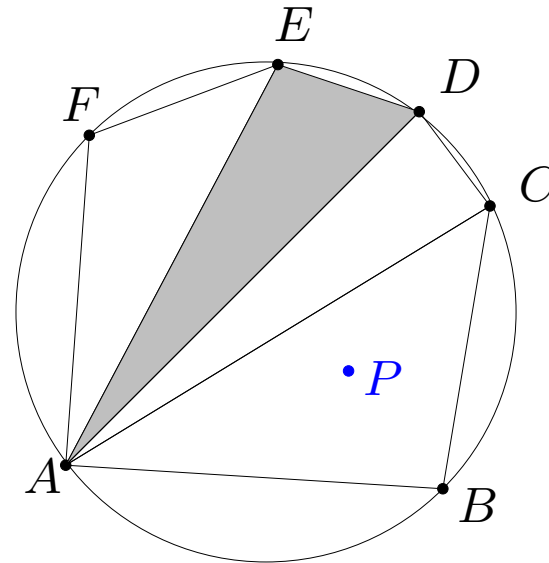
2. Ricerca dei triangoli successivi

- ▶ Dato che la cavità è un dominio semplicemente connesso, una volta noto un qualsiasi triangolo appartenente alla cavità si possono trovare tutti gli altri triangoli della cavità con una ricerca tra vicini (e vicini dei vicini, e così via) in modo molto efficiente.

Errori di troncamento e Triangolazione di Delaunay

- ▶ L'unica operazione nella costruzione della triangolazione di Delaunay che richiede operazioni tra numeri reali è la verifica del criterio del cerchio circoscritto (se un punto sia interno o meno al cerchio)
- ▶ Si devono quindi conoscere le coordinate del centro e il valore del raggio del cerchio circoscritto in modo da poter calcolare la distanza del nuovo punto dal centro e confrontarla con il raggio.
- ▶ Questa operazione è affetta da errori di troncamento che possono portare a errori nella costruzione della triangolazione
- ▶ Gli errori si hanno a causa di possibili incoerenze di valutazione del criterio del cerchio circoscritto che portano a cavità che **non sono stellate** rispetto al punto da inserire
- ▶ Riconnettendo una cavità non stellata si possono ottenere triangoli con volume negativo.
- ▶ In 2D il problema si risolve semplicemente. In 3D, invece, non è banale impedire la costruzione di tetraedri di volume nullo (“slivers”)

Cavità non stellata in 2D

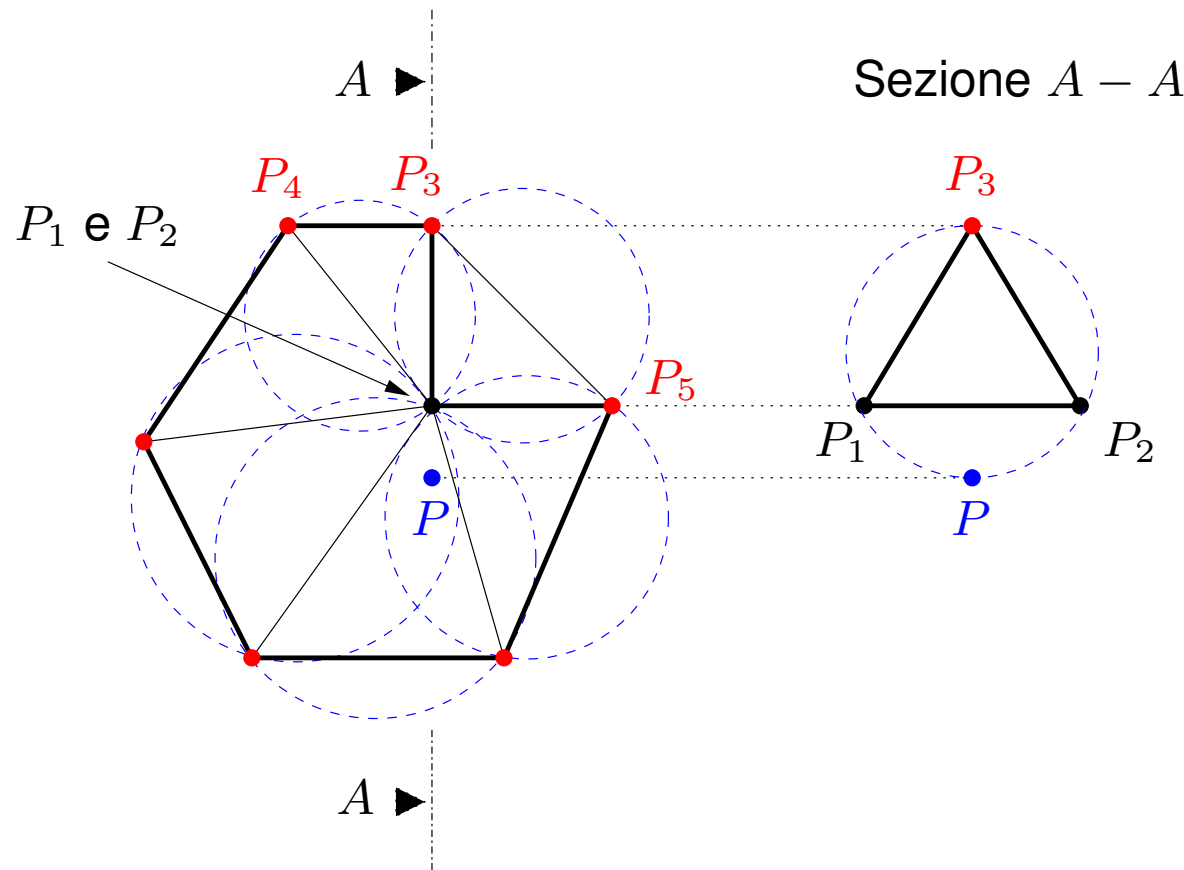


Trucco per la costruzione “sicura” della cavità in 2D:

- ▶ Inizializzazione: Cavità = Base
- ▶ Ricerca di vicino in vicino partendo dalla base: Cavità = Cavità + triangoli che violano il criterio del cerchio circoscritto
- ▶ Un triangolo che NON viola il criterio del cerchio circoscritto impedisce la propagazione della Cavità
- ▶ In 3D il trucco non funziona: è possibile “girare attorno” ad un triangolo NON cancellato

Generazione di tetraedri di volume nullo

- Un tetraedro “sliver” si genera a causa di una valutazione incoerente del criterio del cerchio circoscritto. Ad esempio se per i due tetraedri $T_a = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $T_b = \{P_1, P_2, P_3, P_5\}$ risulta che $T_a \in \mathcal{C}$ mentre $T_b \notin \mathcal{C}$, la cavità non è stellata e si forma lo “sliver” $T_s = \{P, P_1, P_2, P_3\}$.



Triangolazione senza Slivers

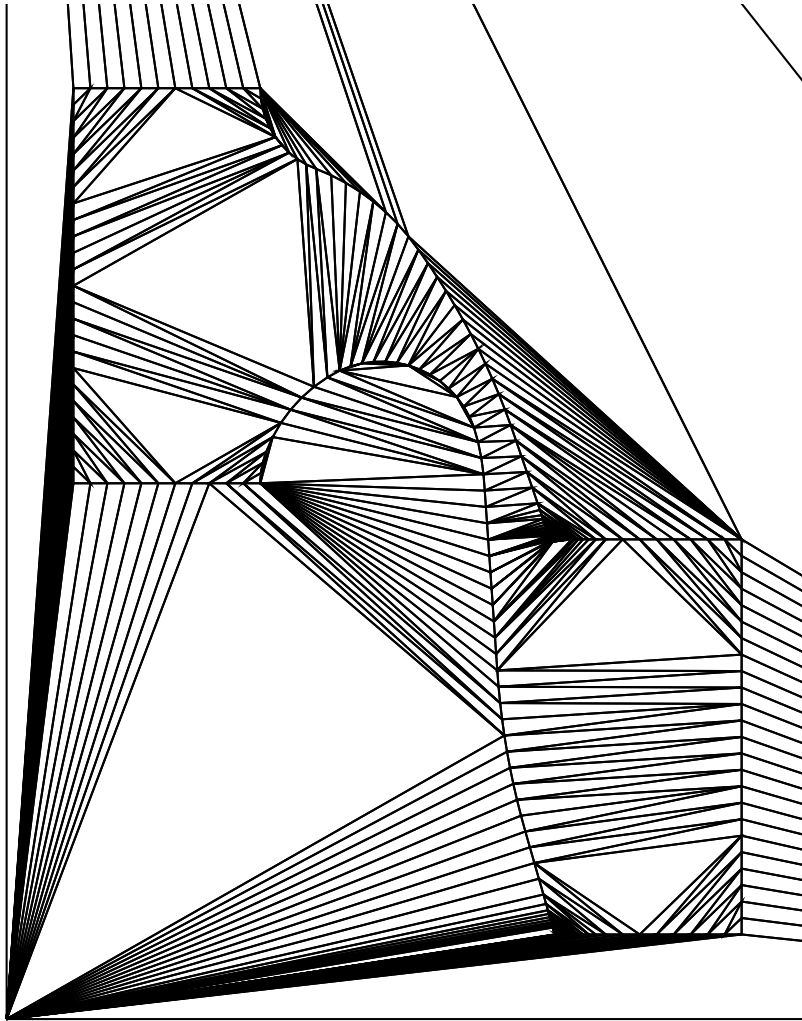
- ▶ La generazione di sliver è causata dall'errore di troncamento
- ▶ Per non avere slivers “basta” valutare il test del cerchio circoscritto in aritmetica esatta. La cosa è possibile ma molto onerosa dal punto di vista computazionale
- ▶ Una metodo alternativo e meno costoso consiste nel correggere la cavità calcolata in modo approssimato controllando in aritmetica esatta se la cavità è stellata (il test del semispazio è molto più semplice di quello del cerchio circoscritto).
- ▶ Il secondo metodo ha lo svantaggio di non garantire che la triangolazione finale sia esattamente di Delaunay, ma, dal punto di vista della generazione di griglia, questo svantaggio non ha alcuna rilevanza.
- ▶ Un altro metodo (che non necessita di calcoli in aritmetica esatta ma da meno garanzia di successo), consiste nel “rimandare” la connessione dei punti che producono slivers nella speranza che connettendo altri punti la configurazione di tetraedri che crea problemi si modifichi e che quindi alla fine il punto “rimandato” possa essere connesso senza trattamenti particolari.

Triangolazione di Delaunay e Griglie di calcolo

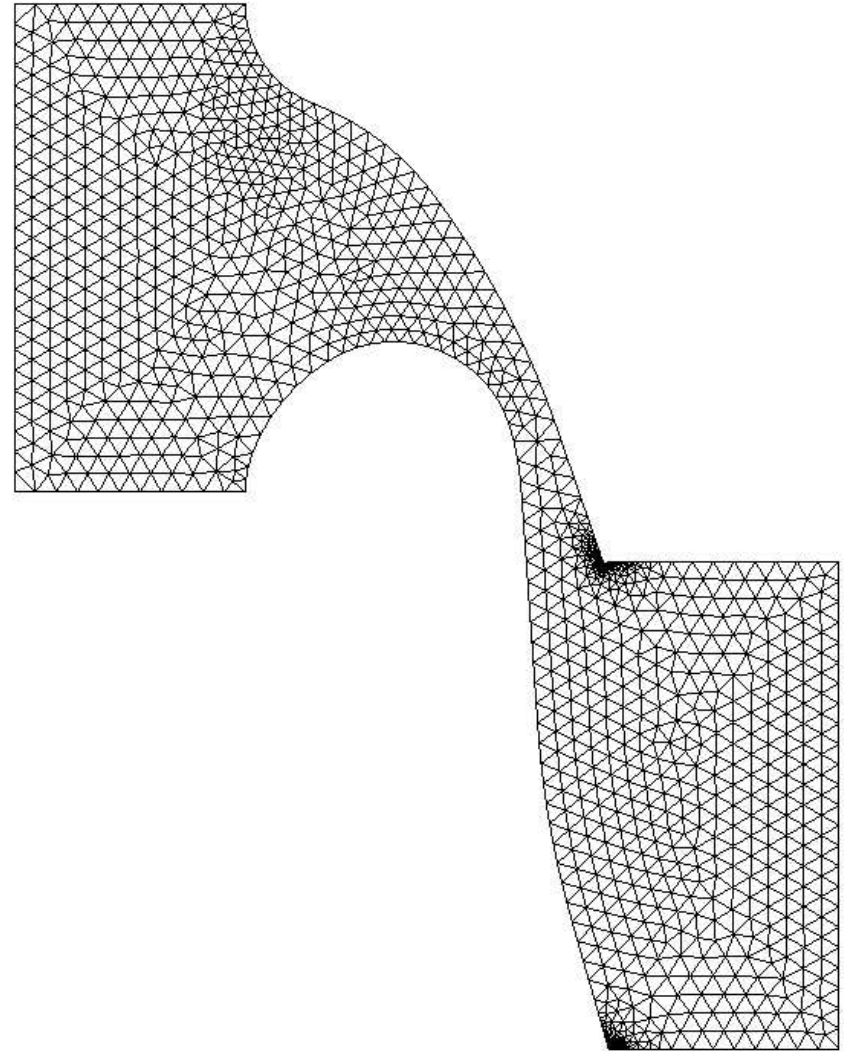
- ▶ Il vantaggio della triangolazione di Delaunay consiste nella possibilità di generare la triangolazione **del guscio convesso** di insiemi arbitrari di punti in modo efficiente e robusto.
- ▶ Per una griglia di calcolo serve una nozione leggermente diversa di triangolazione
 - triangolazione di un poligono in 2D = insieme di triangoli la cui unione è il poligono
 - triangolazione di un poliedro in 3D = insieme di tetraedri la cui unione è il poliedro
- ▶ Di fatto serve una triangolazione in cui i lati (spigoli e facce in 3D) di contorno sono lati (facce e spigoli) della triangolazione.
- ▶ Se nella triangolazione di Delaunay di un insieme di “punti di griglia” la condizione precedente è verificata, allora è possibile dividere i triangoli “interni” al dominio da quelli “esterni”, indipendentemente dalla forma del dominio
- ▶ l'insieme dei triangoli interni costituisce la triangolazione del poligono (poliedro), ovvero la griglia di calcolo

Triangolazione dell'ugello di uno stadio di turbina

Nodi del contorno

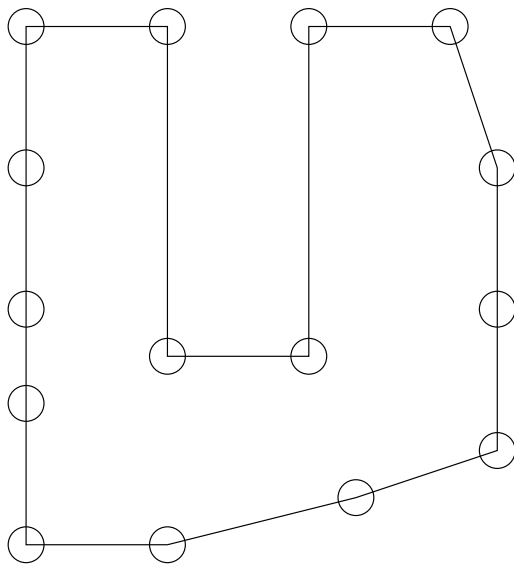


Nodi del dominio

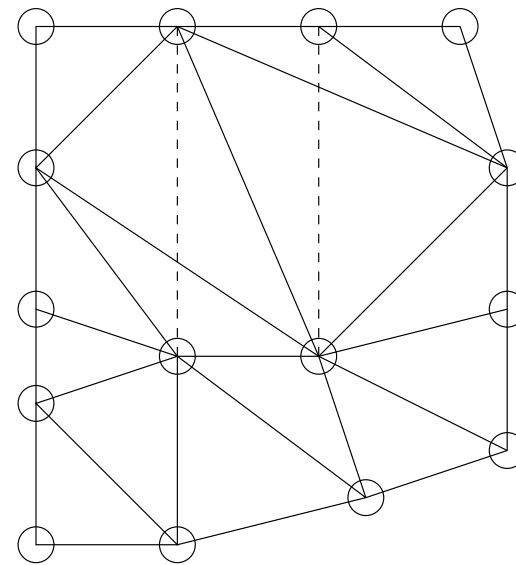


Triangolazione di Delaunay e Griglie di calcolo

- Dato che la triangolazione di Delaunay è univocamente determinata dalla posizione dei punti, non vi è però garanzia alcuna che nella triangolazione di Delaunay di un insieme di “punti di griglia” compaiano i lati di contorno del dominio (vedi esempio).



Contorno del
dominio



Triangolazione di Delaunay
dei punti che discretizzano
il contorno

Triangolazione vincolata

► Definizioni

1. Per “vincolo” si intende un insieme di lati (2D) o di facce (3D)
2. Per triangolazione vincolata (di Delaunay o meno) si intende una triangolazione in cui sono presenti i lati (facce) del vincolo.

► La triangolazione di Delaunay risulta automaticamente vincolata se il vincolo soddisfa ad opportune condizioni di “regolarità”.

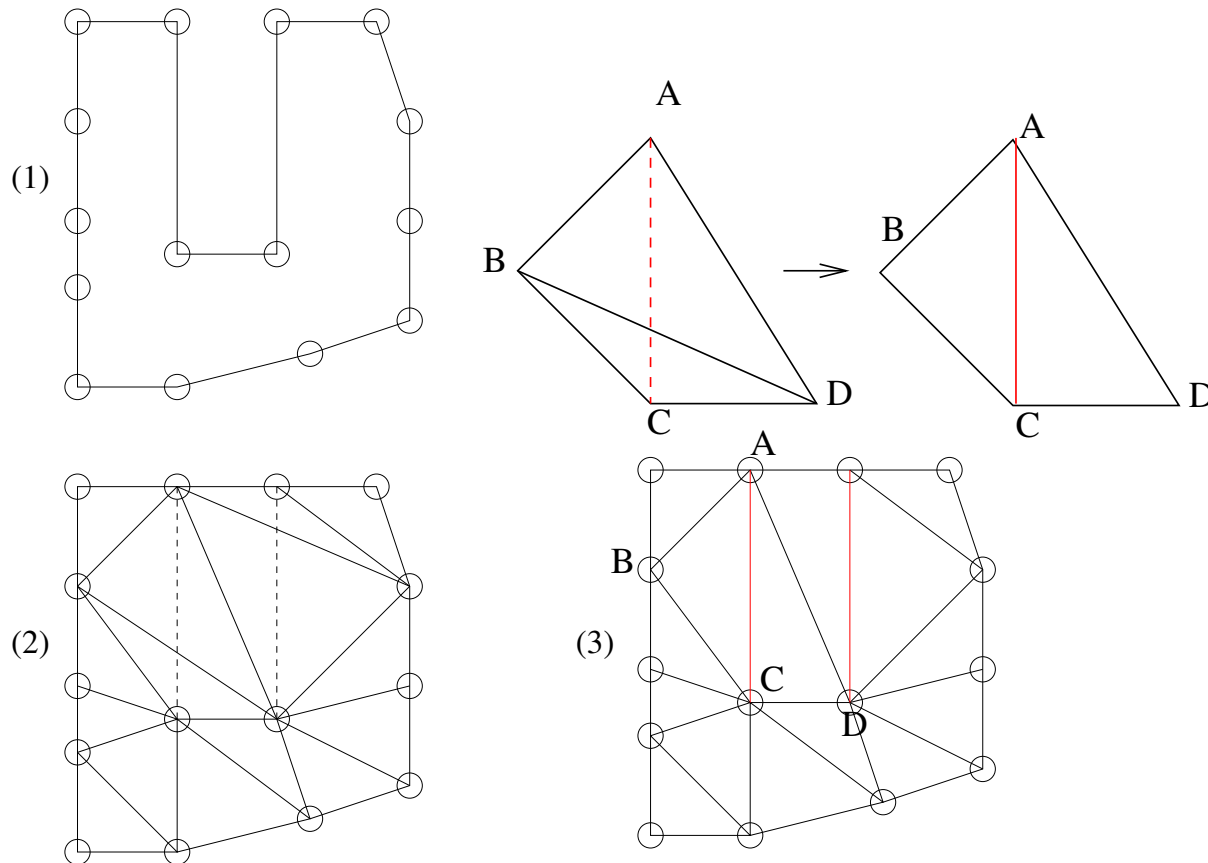
► Infatti, dato che in una triangolazione di Delaunay vengono connessi punti “vicini” (nel senso di punti i cui domini di Voronoi hanno un lato in comune), la triangolazione di Delaunay risulterà vincolata solo se gli estremi dei lati o delle facce del vincolo sono sufficientemente “vicini” gli uni agli altri (il vincolo è “fitto”).

► Esistono quindi sostanzialmente due strade per arrivare ad una triangolazione vincolata:

1. Modificare il vincolo in modo che la triangolazione di Delunay risulti automaticamente vincolata (infittire i nodi di contorno)
2. Modificare la triangolazione di Delaunay (che non risulterà quindi più essere di Delaunay) in modo che rispetti il vincolo

Triangolazione vincolata in 2D

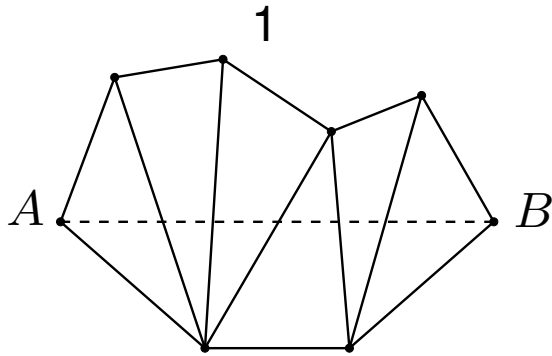
- In 2D il vincolo consiste in un insieme di lati, e il suo soddisfacimento si ottiene facilmente, sia rendendo ammissibile il vincolo (suddivisione del lato mancante in sottosegmenti e ritriangolazione) che modificando la triangolazione (vedi figura)



Triangolazione vincolata in 2D

Algoritmo delle trasformazioni lato-lato:

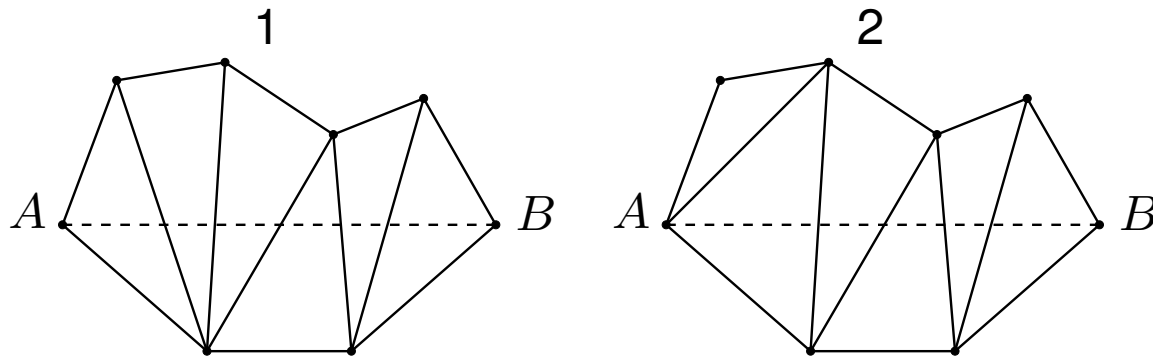
1. trova il “tubo” di triangoli che non soddisfano al vincolo
2. esegui una trasformazione lato-lato per il lato opposto al triangolo del tubo che possiede uno dei due estremi del lato vincolato



Triangolazione vincolata in 2D

Algoritmo delle trasformazioni lato-lato:

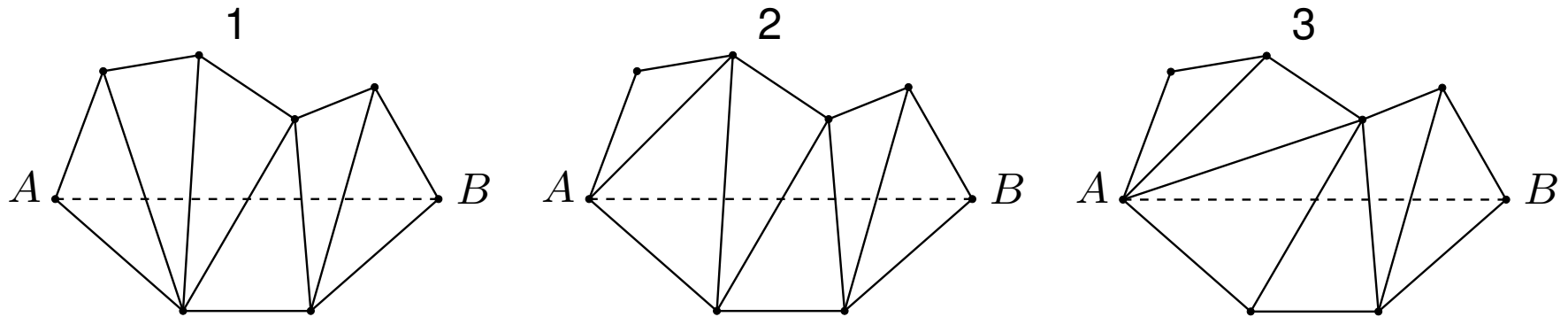
1. trova il “tubo” di triangoli che non soddisfano al vincolo
2. esegui una trasformazione lato-lato per il lato opposto al triangolo del tubo che possiede uno dei due estremi del lato vincolato



Triangolazione vincolata in 2D

Algoritmo delle trasformazioni lato-lato:

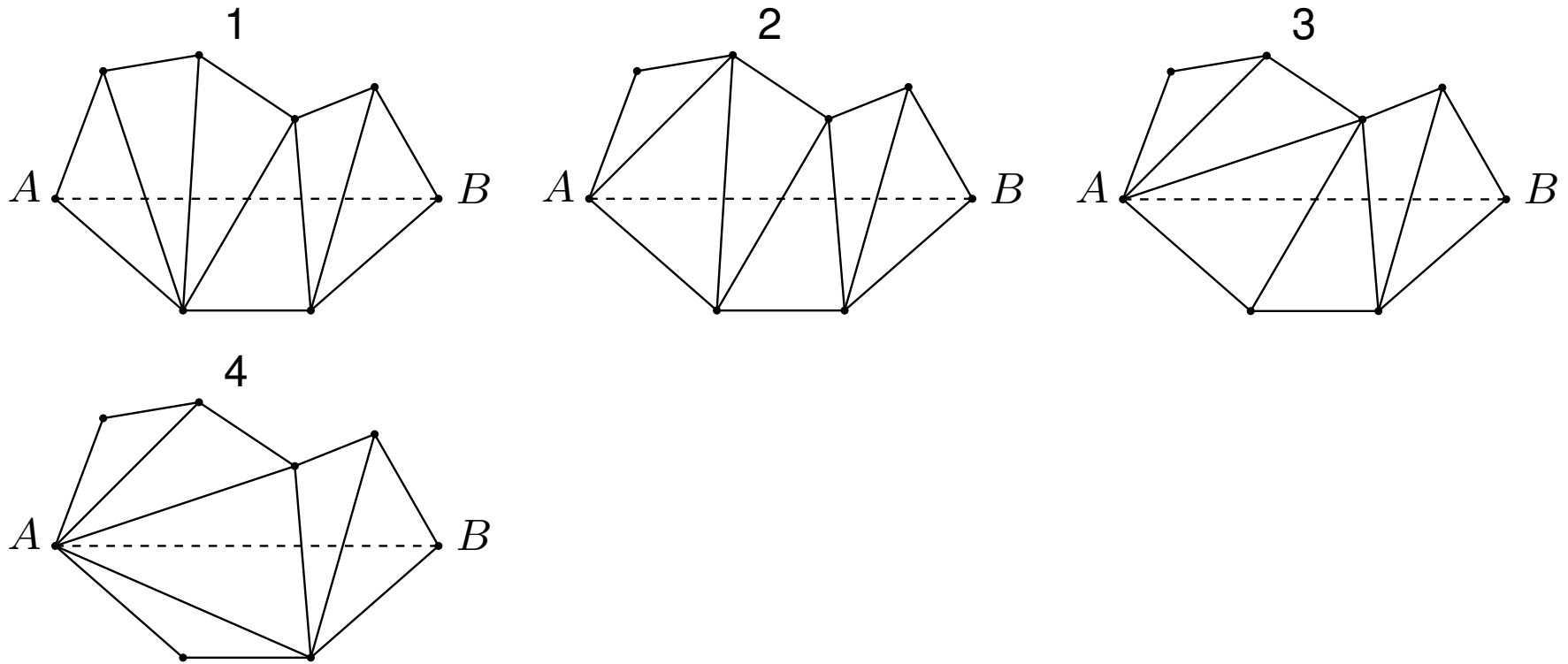
1. trova il “tubo” di triangoli che non soddisfano al vincolo
2. esegui una trasformazione lato-lato per il lato opposto al triangolo del tubo che possiede uno dei due estremi del lato vincolato



Triangolazione vincolata in 2D

Algoritmo delle trasformazioni lato-lato:

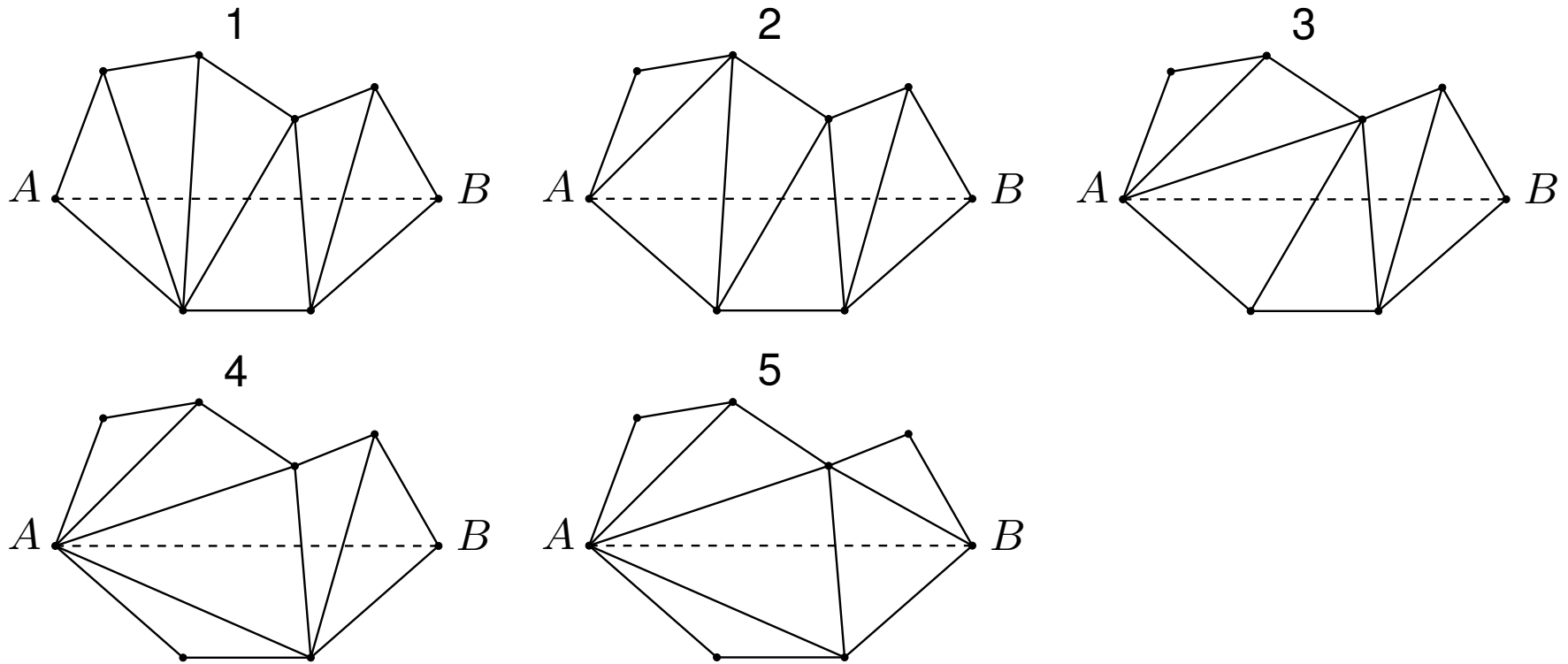
1. trova il “tubo” di triangoli che non soddisfano al vincolo
2. esegui una trasformazione lato-lato per il lato opposto al triangolo del tubo che possiede uno dei due estremi del lato vincolato



Triangolazione vincolata in 2D

Algoritmo delle trasformazioni lato-lato:

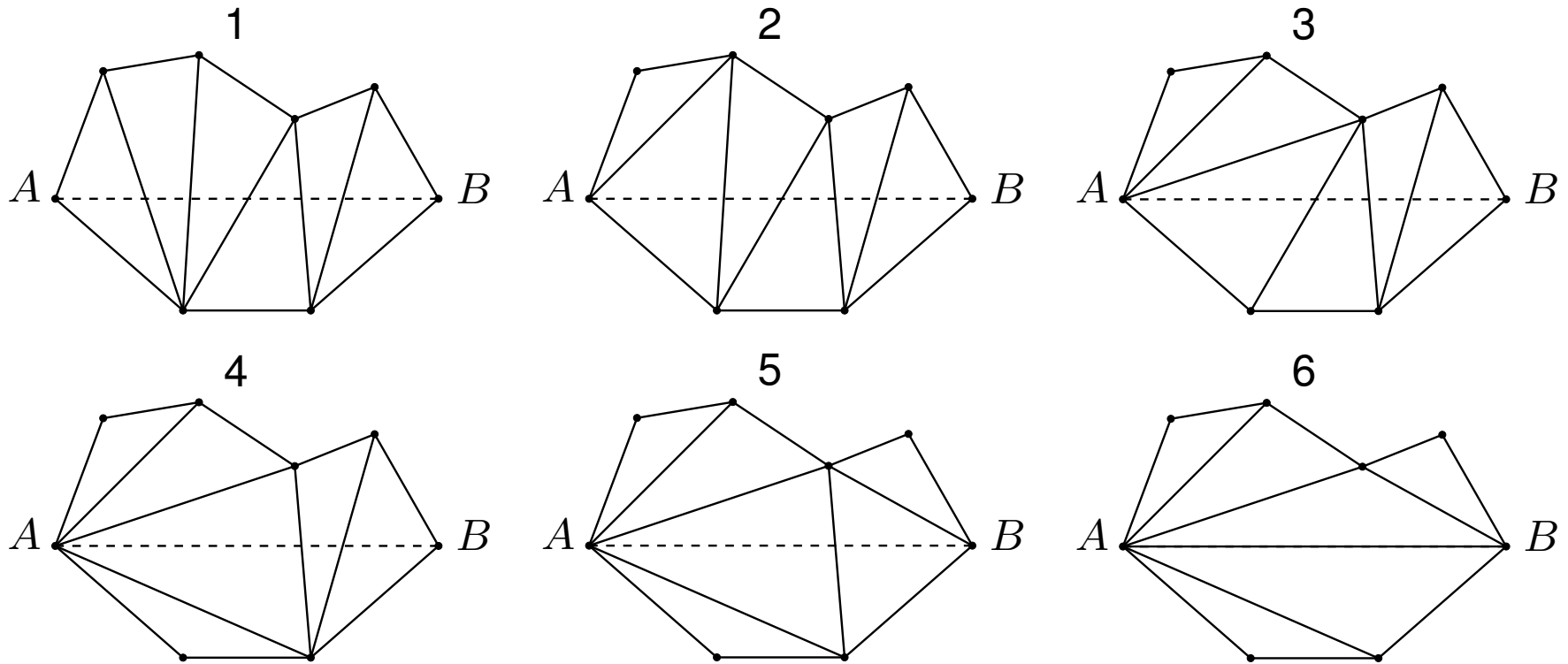
1. trova il “tubo” di triangoli che non soddisfano al vincolo
2. esegui una trasformazione lato-lato per il lato opposto al triangolo del tubo che possiede uno dei due estremi del lato vincolato



Triangolazione vincolata in 2D

Algoritmo delle trasformazioni lato-lato:

1. trova il “tubo” di triangoli che non soddisfano al vincolo
2. esegui una trasformazione lato-lato per il lato opposto al triangolo del tubo che possiede uno dei due estremi del lato vincolato



Triangolazione vincolata in 3D

In 3D l'ottenimento di una triangolazione vincolata è tutt'altro che banale

- ▶ Modifica del vincolo: il vincolo è costituito in 3D da un insieme di spigoli e facce. E' possibile suddividere gli spigoli e le facce mancanti e poi ritriangolare, ma di fatto la necessità di infittimento “tende” a propagarsi a spigoli e lati del vincolo adiacenti. Alla fine il numero di punti da inserire è notevole e la costruzione della triangolazione vincolata risulta molto costosa dal punto di vista computazionale.
- ▶ Modifica della triangolazione: contrariamente al caso 2D non è detto che in 3D la cosa sia sempre possibile. Esistono infatti esempi (Shönhart) di poliedri che NON possono essere suddivisi in tetraedri a meno di non aggiungere punti di “Steiner” (interni).
- ▶ Il numero minimo di punti di Steiner richiesti per rendere possibile la triangolazione vincolata in 3D non è noto. Non sono nemmeno noti algoritmi efficienti per determinare la posizione dei punti di Steiner.
- ▶ Metodo euristico: modificare la triangolazioni in modo da suddividere oppure da eliminare spigoli e facce che intersecano gli spigoli e/o le facce vincolate mancanti (vedi esempio 2D)

Triangolazione e Griglie di Calcolo

- ▶ Dal punto di vista della generazione di griglia è necessario poter controllare
 1. la dimensione dei triangoli in ogni punto dello spazio (controllo isotropo della spaziatura)
 2. la dimensione dei triangoli in ogni punto e per ogni direzione dello spazio (controllo anisotropo della spaziatura)
- ▶ Una maniera efficace di specificare la spaziatura consiste nel definire un **campo metrico** $\mathcal{M}(x)$ in ogni punto dello spazio che indica sia le direzioni che la spaziatura richiesta in queste direzioni.
- ▶ Definizione del problema della generazione di griglia:
 1. Dato un campo matriciale $\mathcal{M}(x)$
 2. Costruire una triangolazione vincolata tale per cui la distanza tra nodi connessi (lati in 2D e spigoli in 3D) misurata nella metrica $\mathcal{M}(x)$ sia unitaria
- ▶ In pratica il problema di specificare la funzione a valore matriciale $\mathcal{M}(x)$ e tutt'altro che banale ...

Metrica e matrice di trasformazione

- ▶ Fattorizzazione spettrale di \mathcal{M} (autovettori e autovalori)

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^T \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) = [\mathbf{r}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{r}_D(\mathbf{x})]$$

- ▶ \mathbf{r}_i sono D autovettori di lunghezza unitaria e ortogonali tra loro
- ▶ $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$ è la matrice degli autovalori λ_i reali e positivi
- ▶ Matrice di trasformazione:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathcal{M}(\mathbf{x})} = \mathbf{R}(\mathbf{x})\sqrt{\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})}\mathbf{R}(\mathbf{x})^T \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{T}(\mathbf{x})^T$$

- ▶ \mathbf{T} trasforma un lato \mathbf{v} di lunghezza unitaria in \mathcal{M} in un lato $\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{v}$ di lunghezza unitaria nell'usuale spazio euclideo

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{w}} = \sqrt{(\mathbf{T}\mathbf{v})^T(\mathbf{T}\mathbf{v})} = \sqrt{\mathbf{v}^T\mathcal{M}\mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{M}}$$

Metrica e controllo della spaziatura

- ▶ La spaziatura degli elementi può essere data specificando D direzioni α_i e la spaziatura associata δ_i
- ▶ La matrice di trasformazione T deve mappare un lato diretto come α_i di lunghezza δ_i in un lato unitario
- ▶ T può essere quindi espressa come la sovrapposizione di D scalature di un fattore $1/\delta_i$ nelle direzioni α_i

$$T = \sum_{i=1}^D \alpha_i \left(\frac{1}{\delta_i} \right) \alpha_i^T \quad T = \sum_{i=1}^D \mathbf{r}_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{r}_i^T$$

- ▶ Confrontando si ricava il legame tra autovettori, autovalori, direzioni e spaziature

$$\mathbf{r}_i \equiv \alpha_i \quad \lambda_i \equiv \frac{1}{\delta_i^2}$$

- ▶ Note le direzioni α_i e le spaziature δ_i si ricava \mathcal{M}

Triangolazione di Delaunay anisotropa

- ▶ La triangolazione di Delaunay tende a connettere i punti in modo da produrre triangoli “equiangoli” (e quindi equilateri) per quanto possibile (si pensi alla proprietà del massimo minimo angolo). E’ quindi poco adatta alla generazione di triangolazioni anisotrope.
- ▶ Si noti che
 - Il controllo della dimensione della griglia è realizzato mediante un campo di metriche $\mathcal{M}(x)$
 - La triangolazione di Delaunay è interamente costruita sulla nozione di “distanza” Euclidea
- ▶ Utilizzando la nozione di distanza in uno spazio Riemanniano con metrica $\mathcal{M}(x)$ si può costruire una “triangolazione di Delaunay generalizzata” adatta a griglie anisotrope
- ▶ In pratica, come vedremo, ci si deve accontentare di una costruzione geometrica approssimata
- ▶ Dal punto di vista della generazione di griglia queste approssimazioni sono irrilevanti

Distanza in uno spazio Riemanniano

- ▶ E' possibile generalizzare la triangolazione di Delaunay ordinaria ad una triangolazione di Delaunay generalizzata ad uno spazio Riemanniano munito di metrica $\mathcal{M}(x)$
- ▶ La triangolazione di Delaunay standard è costruita sulla nozione di distanza Euclidea

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} = \|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|$$

- ▶ In uno spazio Riemanniano la distanza si calcola come

$$d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_0^1 \sqrt{(\gamma'(s))^T \mathcal{M}(\gamma(s)) \gamma'(s)} ds$$

in cui $\gamma(s)$ è la geodetica che passa per \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 parametrizzata con un parametro s in modo che $\gamma(0) = \mathbf{x}_1$ e $\gamma(1) = \mathbf{x}_2$.

- ▶ Il calcolo della distanza nel caso di spazio Riemanniano richiede il calcolo della curva $\gamma(s)$

Metrica costante

- ▶ La formulazione precedente non è di utilizzo pratico a causa della sua complessità
- ▶ Se la metrica non dipende da x allora la geodetica è il segmento (rettilineo) congiungente i punti x_1 e x_2 e il calcolo della distanza Riemanniana si riduce a

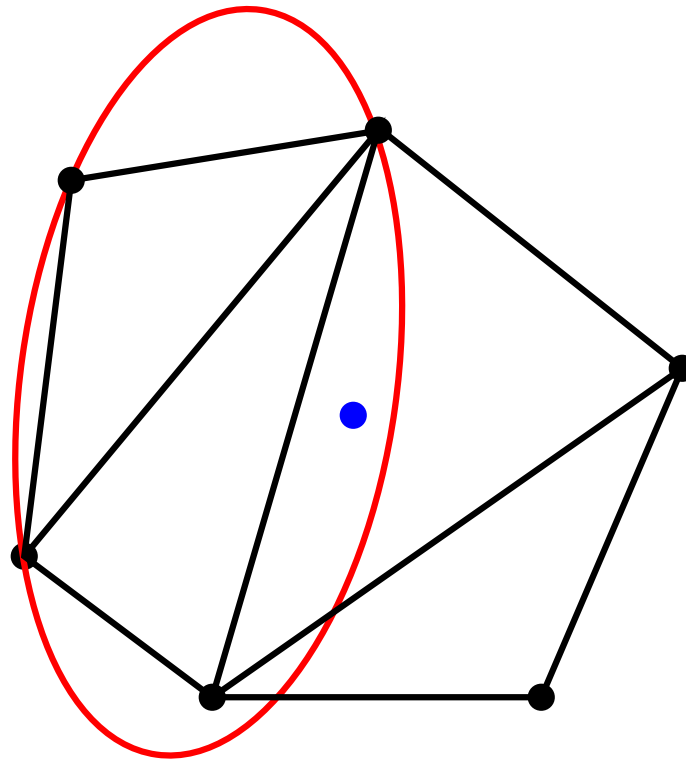
$$d_{\mathcal{M}}(x_1, x_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^T \mathcal{M}(\gamma(s))(x_2 - x_1)} = \|(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{M}}$$

- ▶ Nel caso di metrica costante, il luogo dei punti equidistanti da un punto dato è, nell'ordinario spazio Euclideo, un'ellisse i cui assi sono orientati come gli autovettori della matrice \mathcal{M} .
- ▶ La triangolazione di Delaunay può essere facilmente generalizzata sostituendo al criterio del cerchio circoscritto il "criterio dell'ellisse circoscritto"
- ▶ Si noti che la cavità così ottenuta possiede tutte le proprietà richieste ed in particolare è stellata rispetto al punto \mathcal{P} (cerchio e ellisse sono entrambi figure convesse)

Triangolazione di Delaunay: cavità stellata

La Cavità è stellata:

- ▶ Il contorno di \mathcal{C} è costituito da lati di triangoli
- ▶ per costruzione, ogni lato del contorno di \mathcal{C} è quindi una corda di un'ellisse che contiene \mathcal{P}



Formalizzazione: Misura di Delaunay

- ▶ Nel caso dell'ordinario spazio Euclideo ($\mathcal{M} = \mathcal{I}$), i triangoli della cavità \mathcal{C} sono quelli che violano il criterio del cerchio circoscritto rispetto al nuovo punto \mathcal{P} . Questa condizione può essere formalizzata introducendo
 - Definizione: per ogni coppia (\mathcal{P}, K) di un punto \mathcal{P} e di un triangolo K , si definisce misura di Delaunay

$$\alpha(\mathcal{P}, K) = \frac{d(\mathcal{P}, \mathbf{O}_K)}{r_K}$$

- \mathbf{O}_K è il punto equidistante dai tre vertici del triangolo K —il centro del cerchio circoscritto a K —e r_K è il raggio del cerchio circoscritto. Se $\mathcal{P}_{K,i}$ sono i $D + 1$ vertici del triangolo K , \mathbf{O}_K è soluzione del sistema lineare

$$d(\mathcal{P}_{K,1}, \mathbf{O}_K) = d(\mathcal{P}_{K,2}, \mathbf{O}_K) = \dots = d(\mathcal{P}_{K,D+1}, \mathbf{O}_K)$$

- ▶ Violazione del criterio del cerchio circoscritto $\Leftrightarrow \alpha(\mathcal{P}, K) < 1$

Triangolazione di Delaunay: metrica costante

- ▶ Nel caso di metrica costante, si generalizza la triangolazione di Delaunay utilizzando al posto di α la misura di Delaunay generalizzata

$$\alpha_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, K) = \frac{d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, \mathbf{O}_K)}{r_K}$$

in cui \mathbf{O}_K e r_K sono calcolati con l'operatore $d_{\mathcal{M}}(\cdot, \cdot)$, ovvero sono soluzione delle $D + 1$ equazioni algebriche lineari

$$d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_{K,1}, \mathbf{O}_K) = d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_{K,2}, \mathbf{O}_K) = \dots = d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_{K,D+1}, \mathbf{O}_K)$$

- ▶ Violazione del criterio del cerchio circoscritto $\Leftrightarrow \alpha_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, K) < 1$

Triangolazione di Delaunay: spazio Riemanniano

- ▶ In questo caso la metrica è funzione del posto.
- ▶ Il centro del “cerchio circoscritto” è ancora la soluzione delle equazioni

$$d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_{K,1}, \mathbf{O}_K) = d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_{K,2}, \mathbf{O}_K) = \dots = d_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_{K,D+1}, \mathbf{O}_K)$$

ma questa volta si tratta di equazioni non lineari (che richiedono il calcolo della geodetica per essere risolto)

- ▶ Non è detto che la soluzione esista
- ▶ In pratica non si riesce a trovare \mathbf{O}_K
- ▶ La misura di Delaunay non può essere calcolata (in modo esatto)
- ▶ E' necessario utilizzare una misura di Delaunay approssimata

Triangolazione di Delaunay: spazio Riemanniano

Si possono immaginare vari livelli di approssimazione

- ▶ Metrica costante uguale a quella del punto \mathcal{P} ; il criterio di Delaunay è semplicemente

$$\alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P})}(\mathcal{P}, K) < 1$$

- ▶ Criterio che coinvolge la metrica in più punti, ad esempio
 - 2 punti: \mathcal{P} e il vertice \mathcal{P}_o di K non ancora incluso nella cavità (gli altri vertici sono sicuramente già inclusi se la cavità viene costruita procedendo di vicini in vicino partendo dalla base); il criterio di Delaunay si può scrivere come

$$\alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P})} + \alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P}_o)} < 2$$

- $D + 2$ punti: \mathcal{P} e i $D + 1$ vertici $\mathcal{P}_{K,i}$ del triangolo K ; il criterio di Delaunay si può scrivere come

$$\alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P})} + \sum_{i=1}^{D+1} \alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P}_{K,i})} < D + 2$$

Triangolazione di Delaunay: spazio Riemanniano

- ▶ In ogni caso la cavità risulta essere stellata
 - nel criterio con due punti almeno una delle due misure di Delaunay deve essere minore di 1 (dato che non può essere simultaneamente $\alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P})} > 1$ e $\alpha_{\mathcal{M}(\mathcal{P}_o)} > 1$ se la somma è minore di 2). Ne segue che il nuovo punto è interno ad un'ellisse circoscritto al triangolo da cancellare e la situazione è analoga a quella della metrica costante.
 - nel criterio con $D + 2$ il ragionamento è analogo dato che almeno una delle misure deve essere minore di 1

Generazione di griglie di Delaunay

Generalità

- ▶ Si suppone noto il contorno del dominio Ω come lista di lati (spigoli e facce) che costituisce il vincolo per la triangolazione
- ▶ Il problema è costruire una griglia di Ω in base a:
 1. I soli lati di contorno
 2. Caso di generazione governata isotropicamente: esiste un campo metrico isotropo che estende ad Ω la spaziatura nota sul contorno
 3. Caso di generazione governata anisotropicamente: esiste un campo metrico generico che estende ad Ω la spaziatura nota sul contorno
- ▶ In ogni caso la generazione comporta i seguenti passi
 1. Triangolazione vincolata dei soli punti di contorno (griglia vuota). I metodi per costruire questa griglia sono quelli precedentemente illustrati
 2. Creazione di punti interni in modo da soddisfare alla metrica. Esistono vari metodi che vedremo in seguito.

Metodi per la creazione dei punti di dominio

Tentativo di classificazione:

- ▶ Numero di punti inseriti
 - Si calcola un punto e lo si inserisce immediatamente fino a che la griglia soddisfa ad un qualche requisito
 - Si calcola una lista di punti e la si inserisce, iterando il procedimento fino a che la griglia soddisfa ad un qualche requisito
- ▶ Punti generati in base alla griglia corrente
 - Nel centro del cerchio circoscritto al triangolo
 - Nel baricentro dei triangoli
 - Lungo il diagramma di Voronoi
 - Lungo i lati della triangolazione
- ▶ Punti generati con altri metodi
 - Distribuzione di punti predefinita
 - Quadrees (octrees)
 - Fronte avanzante
 - ...

Controllo della spaziatura

- ▶ Per controllare la spaziatura è necessario disporre della funzione $\mathcal{M}(x)$
- ▶ In pratica questa funzione è ottenuta utilizzando una griglia, detta griglia di “background”, sul quale viene interpolata la metrica
- ▶ La griglia di background deve contenere il dominio Ω
- ▶ La griglia di background non deve necessariamente essere conforme al contorno
- ▶ Vi sono molti tipi di griglie di background
 - Quadtree (Octree)
 - Reticolo regolare (carta a quadretti)
 - Reticolo arbitrario definito dall'utente
 - Reticolo corrente nel processo di generazione iterativo
 - ...

Controllo della spaziatura e griglia vuota

- ▶ Una scelta “naturale” è utilizzare la triangolazione vincolata dei soli punti di contorno come griglia di “background”
- ▶ La spaziatura (\mathcal{M}) è nota al contorno ed è possibile in tal modo interpolarla all'interno del dominio
- ▶ Per “circoscrivere” la zona di influenza del contorno è necessario specificare la metrica in ulteriori punti interni al dominio
- ▶ Un modo automatico per generare tali punti è considerare i centri dei cerchi circoscritti ai triangoli della griglia vuota

Generazione di punti lungo un fronte avanzante

- ▶ Dato iniziale
 - La triangolazione vincolata dei punti di contorno
 - Il controllo della spaziatura
- ▶ Generazione dei punti interni
 - La generazione avviene lungo un “fronte” che si propaga a partire dal contorno e muovendosi all’interno del dominio.
 - Il fronte rappresenta l’interfaccia tra triangoli accettabili e non accettabili (rispetto alla spaziatura richiesta). I triangoli non accettabili adiacenti al fronte sono detti “attivi”.
 - Inizialmente tutti i triangoli “esterni” al dominio sono etichettati come accettabili.
 - I punti vengono generati in corrispondenza del lato che separa triangoli accettabili e non accettabili.
 - Dopo l’inserimento del nuovo punto \mathcal{P} , i nuovi triangoli (quelli che possiedono \mathcal{P} come loro vertice) vengono suddivisi in accettabili e non. In questo modo il “fronte” si propaga.
 - La procedura viene iterata fintanto che tutti i triangoli sono accettabili.

Posizionamento del nuovo punto lungo il fronte

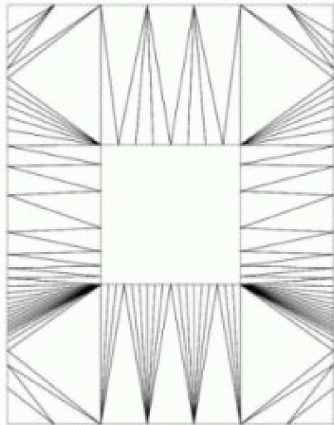
- ▶ Obiettivo: posizionare il punto in modo che, a inserimento avvenuto, si formino connessioni di lunghezza unitaria in \mathcal{M} (per quanto possibile).
- ▶ La posizione di \mathcal{P} è univocamente determinata imponendo che la distanza tra \mathcal{P} e i D vertici del lato (faccia) del fronte sia unitaria in \mathcal{M} .
- ▶ E' necessario controllare che \mathcal{P} non risulti troppo vicino ad altri punti, ovvero che non si formino connessioni di lunghezza $d_{\mathcal{M}} \ll 1$.
- ▶ Vi sono fondamentalmente due varianti del metodo
 1. Generazione di un punto alla volta in corrispondenza del lato del fronte di lunghezza (nell'usuale spazio Euclideo!) minima.
 2. Generazione di un punto per ogni lato del fronte
- ▶ Nel primo caso è necessario l'uso di una opportuna struttura dati per accedere in modo efficiente al lato del fronte da processare
- ▶ Nel secondo caso, essendoci più punti da inserire, è necessario controllare che tali punti non siano troppo vicini tra di loro. Questa operazione è detta "filtraggio" dei punti. Per efficiente il filtraggio serve anche in questo caso una opportuna struttura dati.

Un punto o più punti alla volta

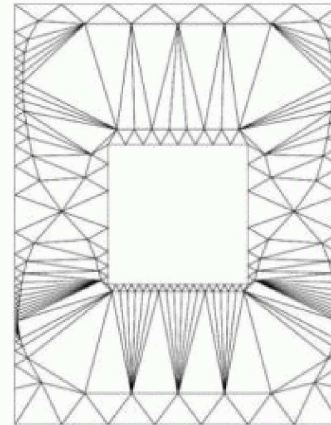
- ▶ Un modo per accedere in modo efficiente al lato del fronte di lunghezza minima è di memorizzare i triangoli attivi in uno “Heap” ordinato in base alla lunghezza del lato del fronte. Lo heap consente
 - Di accedere direttamente al triangolo con il lato minimo
 - Di aggiornare lo heap (inserimento o cancellazione di triangoli) con un costo computazionale $O(\log(n))$, dove n è il numero di triangoli contenuti nello heap.
- ▶ Per filtrare i punti generati e non ancora inseriti, è necessario utilizzare strutture dati appositamente progettate per la ricerca spaziale veloce (quadrees, alternate direction binary trees, ...). L'idea alla base di queste strutture dati è
 - Suddividere lo spazio in opportuni sottodomini di forma semplice
 - Assegnare ad ogni sottodominio i punti che cadono al suo interno
 - La ricerca del punto più vicino ad un punto dato richiede il controllo dei punti di un numero limitato di sottodomini. Il filtraggio può così essere eseguito con un costo computazionale $O(\log(n))$, dove n è il numero di punti.

Esempio di generazione con fronte avanzante

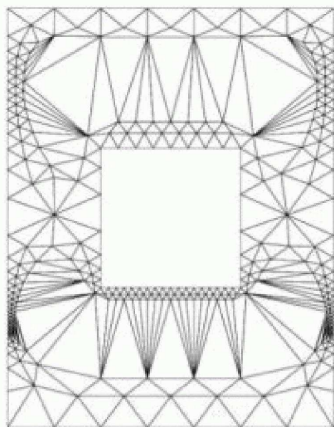
Iteration 0



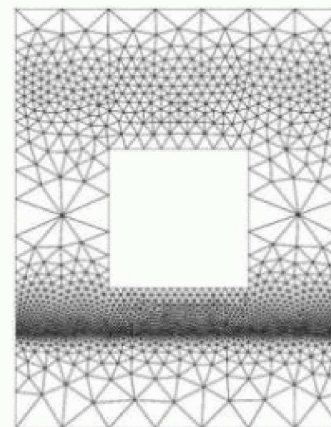
Iteration 1



Iteration 2



Final iteration



Generazione di punti lungo i lati (spigoli)

- ▶ Dato iniziale
 - La triangolazione vincolata dei punti di contorno
 - Il controllo della spaziatura
- ▶ Generazione dei punti interni
 - La generazione avviene lungo le congiungenti i punti connessi (lati dei triangoli in 2D, spigoli dei tetraedri in 3D) della triangolazione.
 - I punti sono distribuiti in modo da suddividere le congiungenti in sottosegmenti di lunghezza approssimativamente unitaria nella metrica di controllo). Per ogni lato (spigolo) è necessario
 - Calcolare la lunghezza $L_{\mathcal{M}}$ del lato (formule di quadratura).
 - Numero di sottosegmenti: $N_s = NINT(L_{\mathcal{M}})$
 - Lunghezza dei sottosegmenti $L_s = L_{\mathcal{M}}/N_s$
 - Prima di connettere i punti così generati occorre un'operazione di filtraggio simile a quella descritta in precedenza.
 - Uno degli aspetti interessanti di questo metodo è che rimane pressochè inalterato in 2D e in 3D.

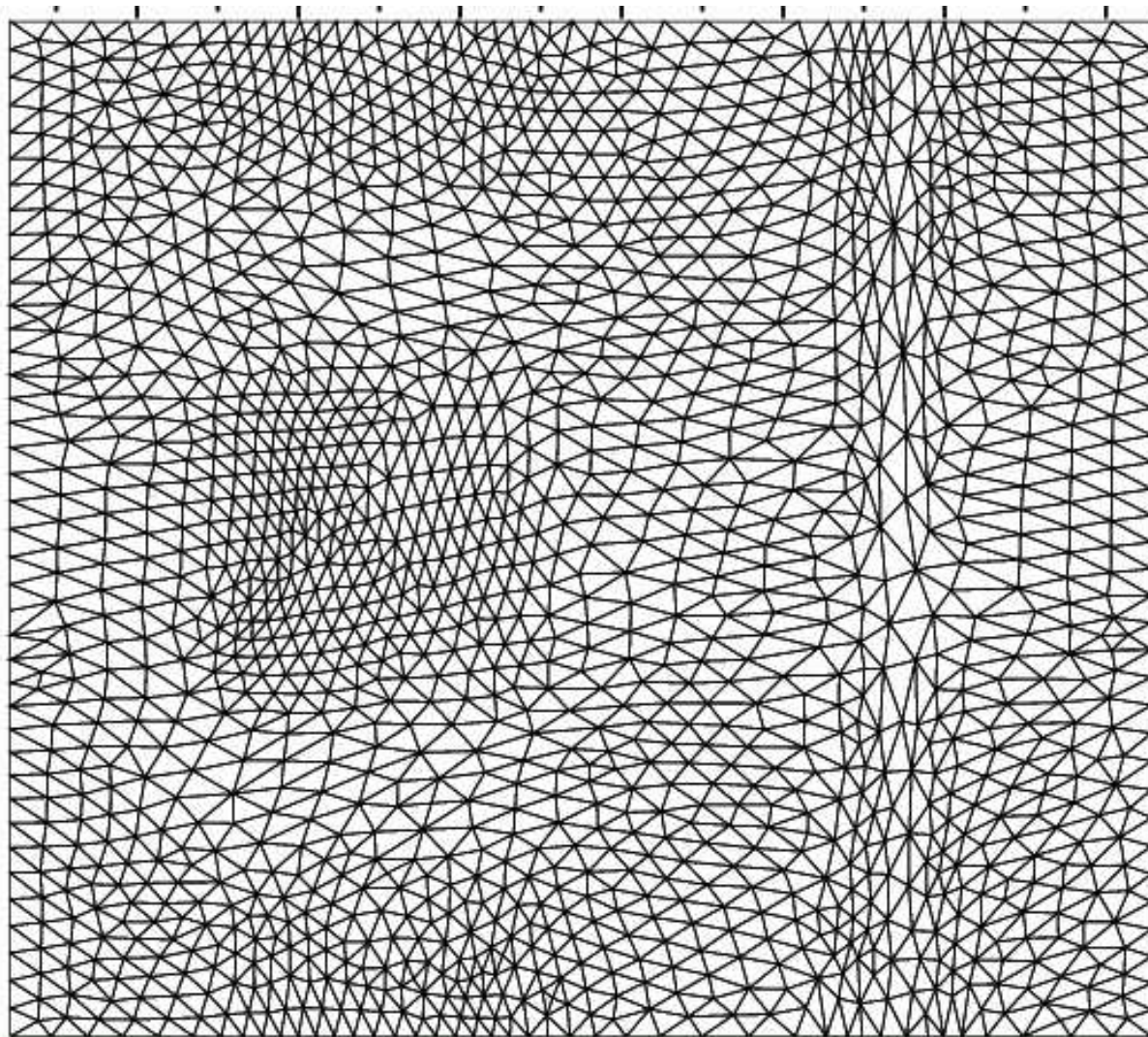
Generazione superficiale

- ▶ Superficie in forma parametrica: $x = x(u, v)$
- ▶ Il reticolo viene generato in uv e poi mappato in xyz
- ▶ Una triangolazione controllata dalla curvatura della superficie è tale per cui la massima distanza tra i lati della triangolazione e la superficie sia minore di un valore assegnato
- ▶ Caso di una curva: se si considera il cerchio osculatore e la corda di tale cerchio di lunghezza ℓ , esiste un legame tra ℓ , il raggio ρ del cerchio, e la distanza massima δ della corda dal cerchio

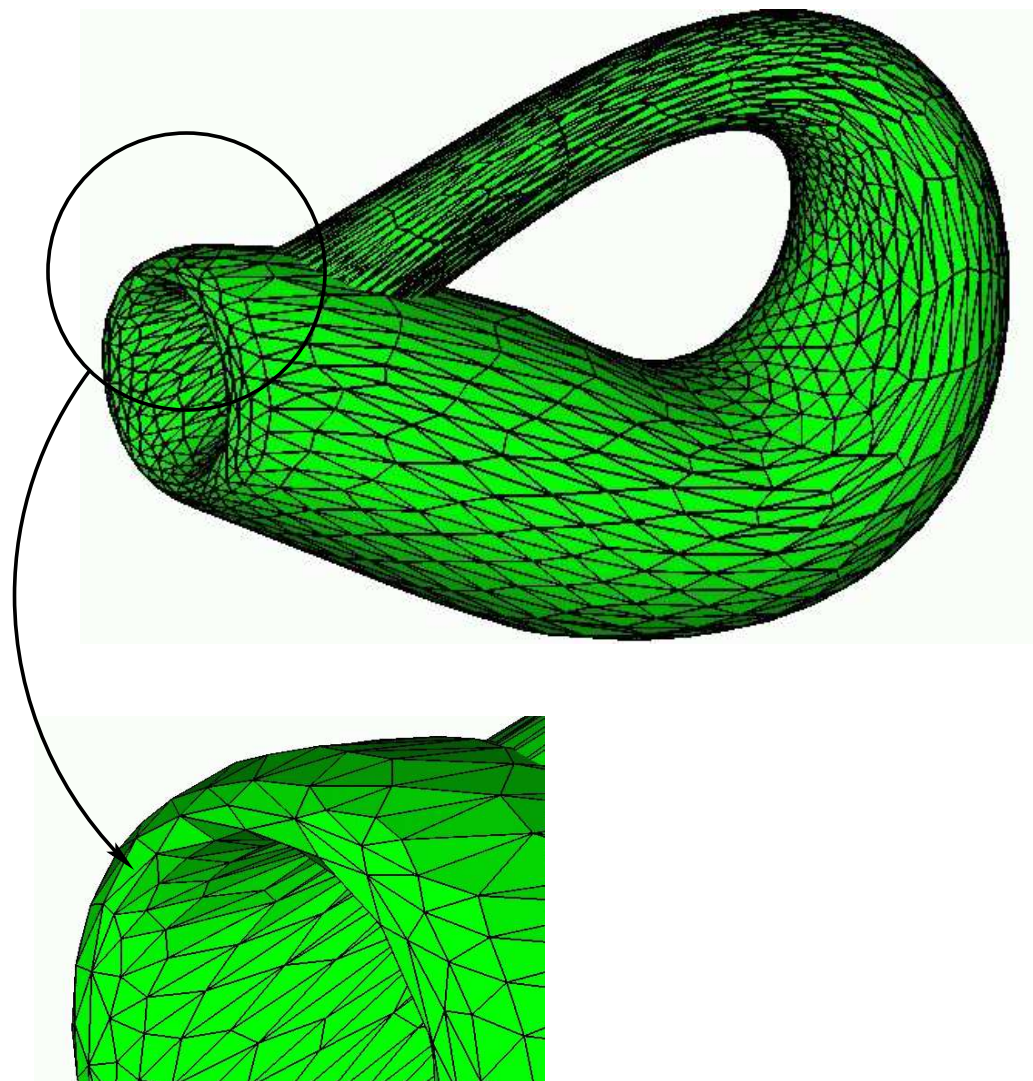
$$\frac{\ell}{\rho} = 2\sqrt{\frac{\delta}{\rho} \left(2 - \frac{\delta}{\rho}\right)}$$

- ▶ La relazione precedente permette di ricavare la spaziatura ℓ nota la curvatura della curva (ρ) e il parametro $\epsilon = \delta/\rho$ che misura quanto bene si vuole rappresentare la curva.
- ▶ Per una superficie si ragiona in modo analogo lungo le direzioni di minima e massima curvatura della superficie.

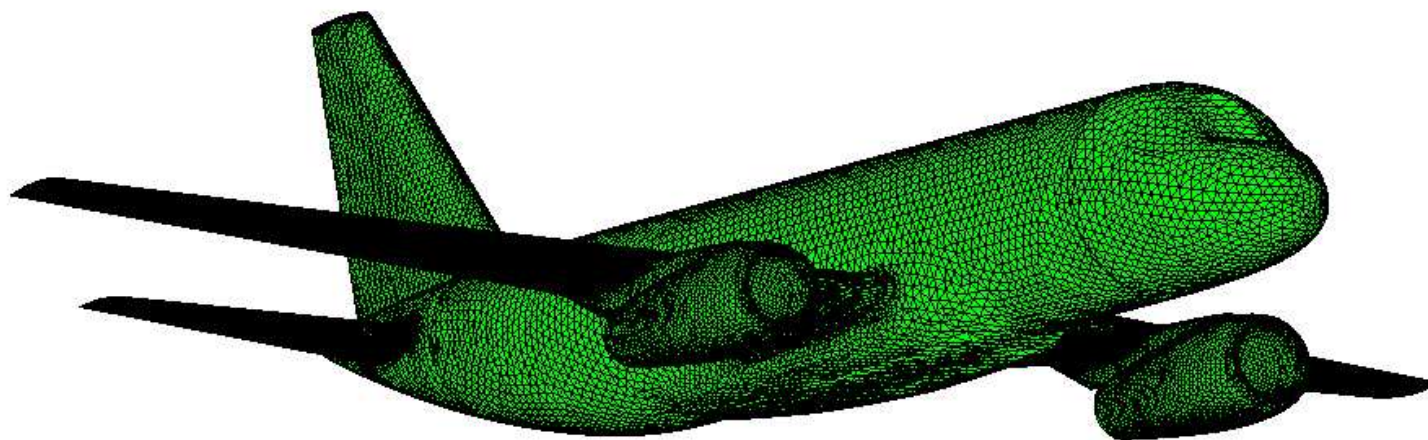
Bottiglia di Klein: spazio parametrico



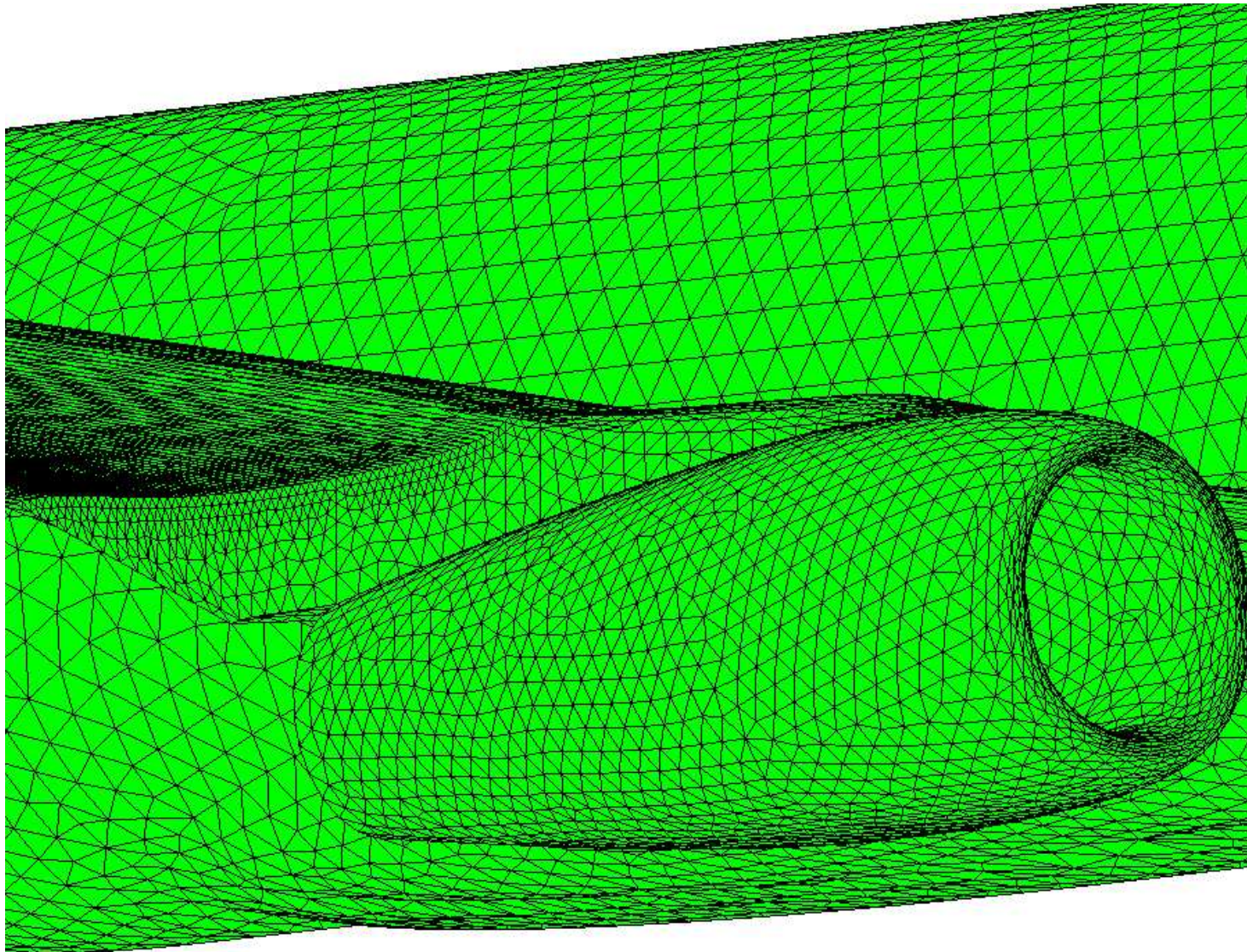
Bottiglia di Klein: spazio fisico



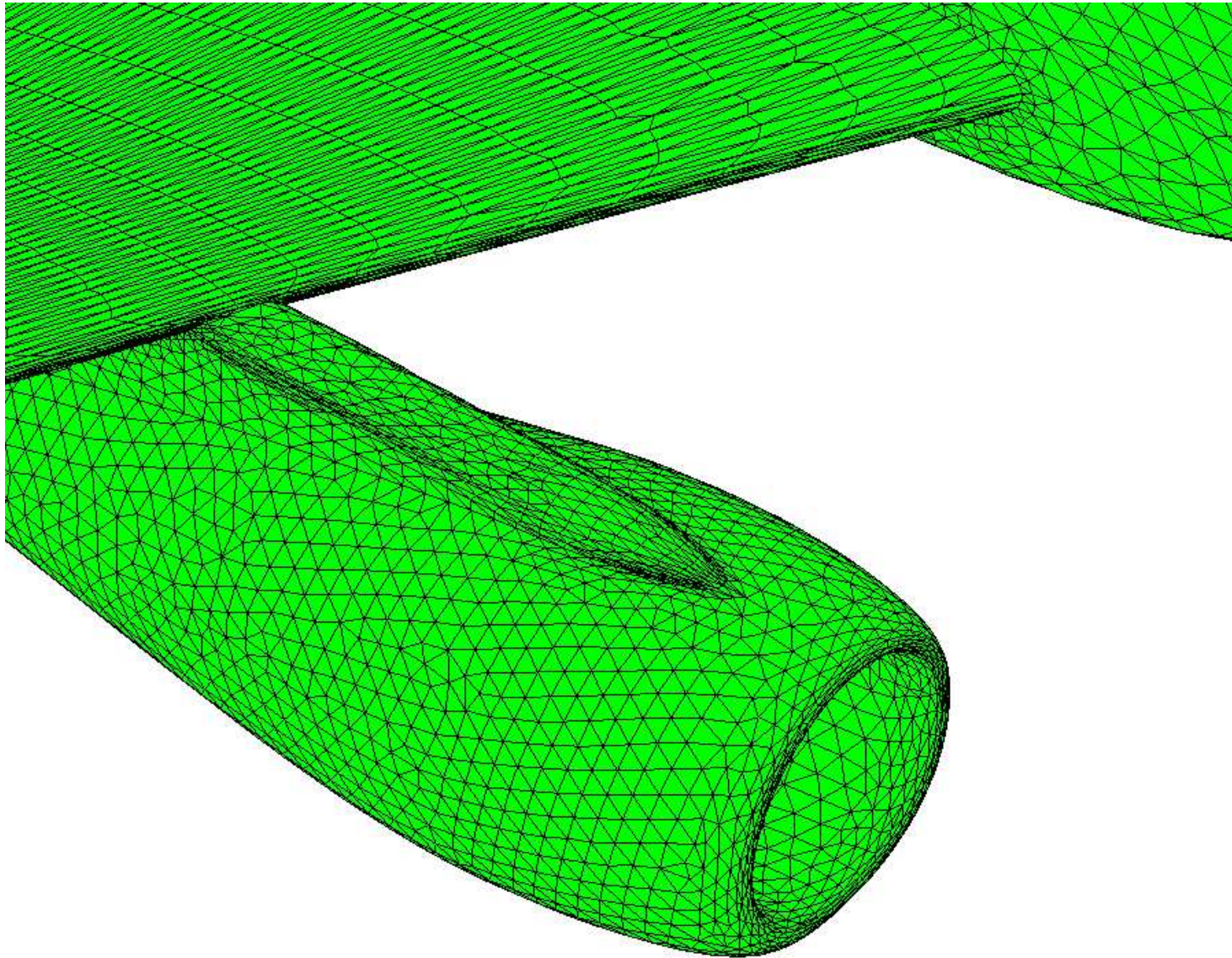
Small Jet: Velivolo completo



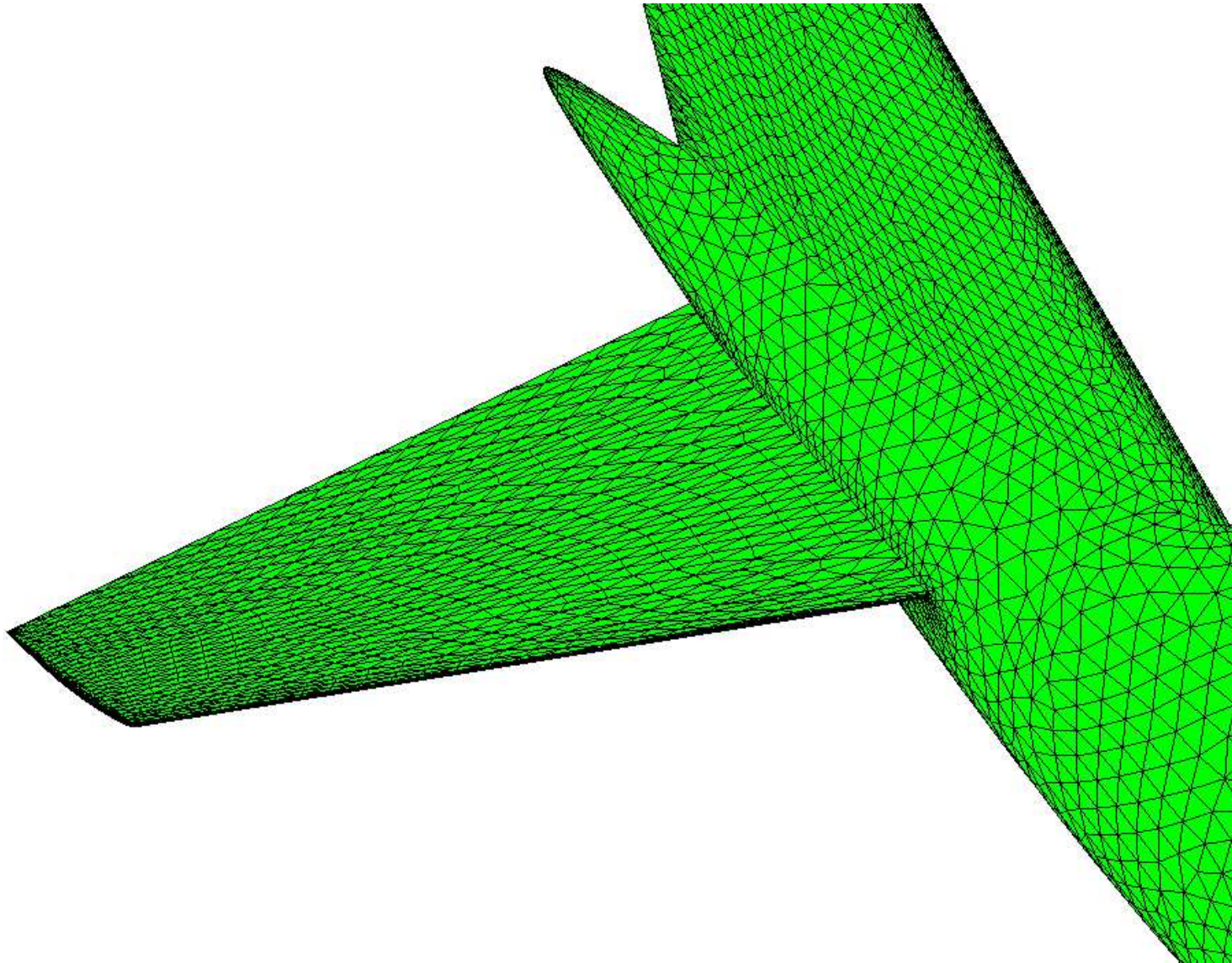
Small Jet: Nacelle



Small Jet: Nacelle



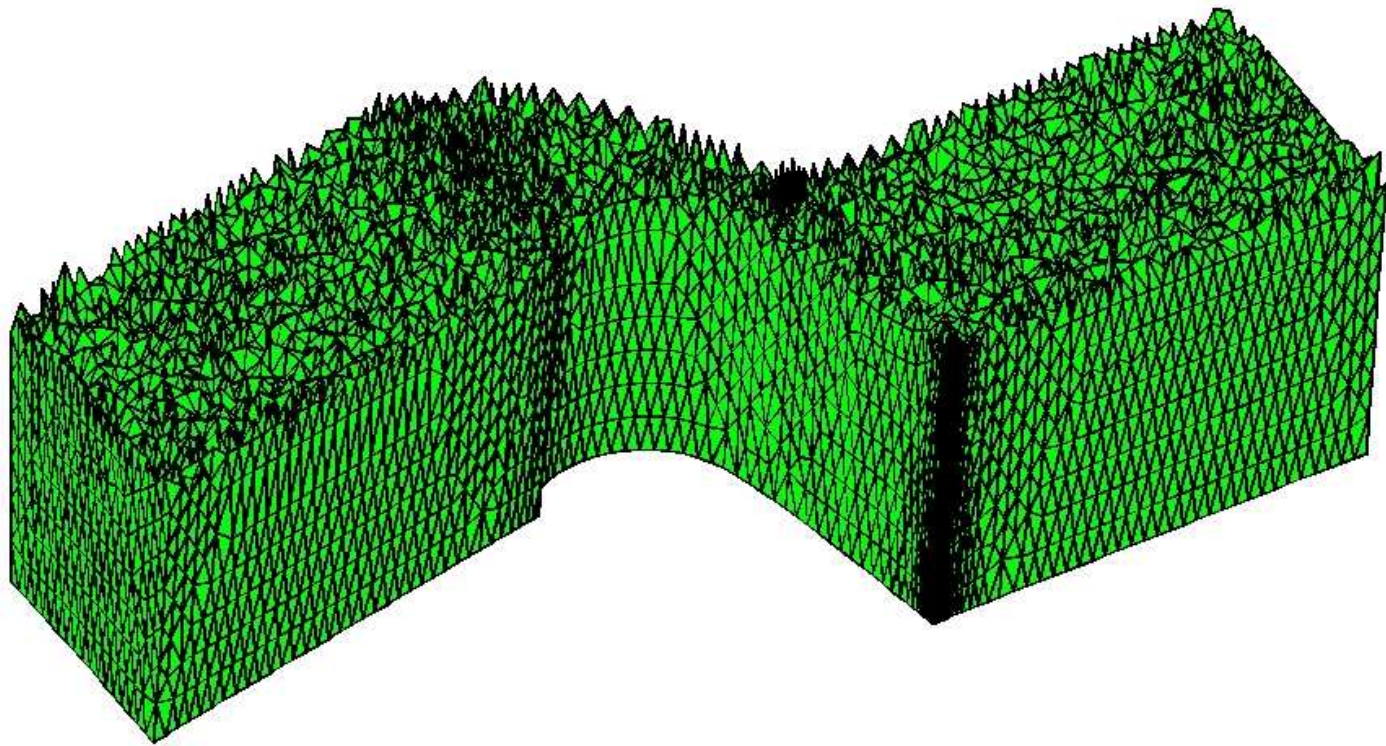
Small Jet: Piano verticale



Generazione in 3D

- ▶ Dato di partenza
 1. Griglia superficiale
 2. Controllo della spaziatura nel volume (ottenuto utilizzando come griglia di background la triangolazione vincolata vuota e punti aggiuntivi per “circoscrivere” l’influenza dei contorni).
- ▶ Inserzione dei punti del dominio: metodo del fronte avanzante oppure metodo dell’inserimento sugli spigoli

Schiera anulare di turbina assiale



Schiera anulare di turbina assiale

